Distribuciones de probabilidad

DISCRETAS (BINOMIAL Y POISSON)

Definición

Son funciones matemáticas que permiten describir como se espera que ocurran los resultados de un experimento aleatorio en función de las características de la variable aleatoria

Variables aleatorias

Discretas:

Una variable aleatoria discreta es una variable aleatoria que tiene valores contables, tales como una lista de enteros no negativos.

Solo pueden tomar valores enteros.

Continuas:

Una variable aleatoria continua es una variable aleatoria con un conjunto de valores posibles (el rango) que es infinito y no se puede contar.

El rango de valores posibles se encuentra dentro de la recta de los reales.

Función de distribución de probabilidad

Es la función que asigna a cada uno de los valores posibles de la variable aleatoria (x_i) su probabilidad (p_i)

Distribución Binomial

ENSAYO DE BERNOULLI Y EJEMPLOS

Definición

La distribución binomial es una distribución discreta muy importante que surge en muchas aplicaciones bioestadísticas. Fue obtenida por Jakob Bernoulli (1654-1705) y publicada en su obra póstuma Ars Conjectandi en 1713.

Esta distribución aparece de forma natural al realizar repeticiones independientes de un experimento que tenga respuesta binaria, generalmente clasificada como “éxito” o “fracaso”; este experimento recibe el nombre de experimento de Bernoulli.

Experimento de Bernoulli

Desde el punto de vista de la teoría de la probabilidad, estos ensayos están modelados por una variable aleatoria que puede tomar sólo dos valores, 0 y 1. Habitualmente, se utiliza el 1 para representar el éxito.

Si p es la probabilidad de éxito, entonces el valor del valor esperado de la variable aleatoria es p y su varianza, $p(1-p)$.

p = Probabilidad de éxito

q = Probabilidad de fracaso = $1-p$

Función y fórmula general

$$p_{(x,n,p)} = C_x^n p^x q^{n-x}$$

Siendo: n el número de ensayos total, p la probabilidad de éxito y x el número de éxitos

Media = np

Varianza = npq

Características de la binomial

Sus parámetros son n y p

Con p = 0,5 la distribución es simétrica

La probabilidad de consultas por problemas respiratorios en una policlínica es de 0,25. Cual es la probabilidad de que habiendo 5 pacientes:

A. Consulten por problemas respiratorios como máximo 2 personas?
B. Que por lo menos una persona consulte por problemas respiratorios?
C. Hallar la media y desviación típica en un total de 100 consultas

Parte A

$$P_{(x,n,p)} = C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$B_{(n,p)} \rightarrow B_{(5,0{,}25)}$$

$$n = 5 \quad p = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P_{(x\leq 2)} = P_{(x=2)} + P_{(x=1)} + P_{(x=0)} = \mathbf{0{,}8965}$$

$$P_{(x=0)} = C_0^5 \times 0{,}25^0 \times 0{,}75^5 = 0{,}2373$$

$$P_{(x=1)} = C_1^5 \times 0{,}25^1 \times 0{,}75^4 = 0{,}3955$$

$$P_{(x=0)} = C_2^5 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^3 = 0{,}2657$$

Parte B

$$B_{(n,p)} \to B_{(5,0,25)}$$

$$n = 5 \quad p = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P_{(x \geq 1)} = P_{(x=1)} + P_{(x=2)} + P_{(x=3)} + P_{(x=4)} + P_{(x=5)} = 1 - P_{(x=0)} = \mathbf{0,7627}$$

$$P_{(x=0)} = C_0^5 \times 0{,}25^0 \times 0{,}75^5 = 0{,}2373$$

Parte C

$B_{(n,p)} \to B_{(100,0,25)}$

$\bar{x} = np = 100 \times 0,25 = 25$

$s = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0,25 \times 0,75} = \sqrt{18,75} = 4,33$

Pregunta múltiple opción

Un informe de la OMS publicado recientemente revela que el 30% de las mujeres uruguayas son obesas. En un grupo de 20 mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que la mitad sean obesas?

a) 3%
b) 5%
c) 30%
d) 50%
e) 98%

Pregunta múltiple opción

Un informe de la OMS publicado recientemente revela que el 30% de las mujeres uruguayas son obesas. En un grupo de 20 mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que 6 o mas sean obesas?

a) 42%

b) 58%

c) 61%

d) 77%

Distribución de Poisson

CARACTERÍSTICAS Y EJEMPLO

Definición como caso límite de binomial

La distribución de Poisson debe su nombre al matemático francés Simeón Denis Poisson (1781-1840), aunque ya había sido introducida en 1718 por Abraham De Moivre (1667-1754) como una forma límite de la distribución binomial que surge cuando se observa un evento raro después de un número grande de repeticiones.

En general, la distribución de Poisson de parámetro λ se puede utilizar como una aproximación de la binomial, $B(n, p)$, si el número de pruebas n es grande, pero la probabilidad de éxito p es pequeña, siendo $\lambda = np$

Otra forma de definirla

La distribución de Poisson surge cuando un evento o suceso “raro” ocurre aleatoriamente en el espacio o el tiempo.

La variable asociada es el número de ocurrencias del evento en un intervalo o espacio continuo, por tanto, es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros de 0 en adelante (0, 1, 2,...).

El número de pacientes que llegan a un consultorio en un lapso dado, el número de llamadas que recibe un servicio de atención a urgencias durante 1 hora, el número de células anormales en una superficie histológica o el número de glóbulos blancos en un milímetro cúbico de sangre son ejemplos de variables que siguen una distribución de Poisson.

En general, es una distribución muy utilizada en diversas áreas de la investigación médica y en particular, en epidemiología

Evento ¿“raro”?

El concepto de evento “raro” o poco frecuente debe ser entendido en el sentido de que la probabilidad de observar k eventos decrece rápidamente a medida que k aumenta.

Por ejemplo, el número de reacciones adversas tras la administración de un fármaco sigue una distribución de Poisson de $\lambda = 2$. Si se administra este fármaco a 1.000 individuos, la probabilidad de que se produzca una reacción adversa ($k = 1$) es 0,27; los valores de dicha probabilidad para $k = 2, 3, 4, 5, 6$ reacciones, respectivamente, son: 0,27; 0,18; 0,09; 0,03 y 0,01. Para $k = 10$ o mayor, la probabilidad es virtualmente 0.

Función de probabilidad

$$P_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$\mu = np = \lambda$$
$$\sigma^2 = npq = \lambda q = \lambda$$

Siendo $\lambda = cte = np$ y $n \to \infty, p \to 0$ y q $\to 1$

Un departamento de radiografía general recibe generalmente 4 pacientes por turno nocturno. Cual es la probabilidad de:

A. Recibir 2 pacientes en un turno
B. No recibir ningún paciente
C. Recibir menos de 3 pacientes
D. Recibir mas de 3 pacientes

Parte A

$$P_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$\lambda = 4\ pacientes/turno$$

$$P_{(x=2)} = \frac{e^{-4}4^{2}}{2!} = 0{,}1465$$

Parte B

$$P_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$\lambda = 4\ pacientes/turno$$

$$P_{(x=0)} = \frac{e^{-4}4^{0}}{0!} = 0{,}01831$$

Parte C

$$P_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$\lambda = 4 \ pacientes/turno$$

$$P_{(x<3)} = P_{(x=0)} + P_{(x=1)} + P_{(x=2)} = \mathbf{0,238}$$

$$P_{(x=0)} = \frac{e^{-4}4^{0}}{0!} = 0{,}01831$$

$$P_{(x=1)} = \frac{e^{-4}4^{1}}{1!} = 0{,}0732$$

$$P_{(x=2)} = \frac{e^{-4}4^{2}}{2!} = 0{,}1465$$

Parte D

$$P_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$\lambda = 4\ pacientes/turno$$

$$P_{(x>3)} = 1 - P_{(x=0)} + P_{(x=1)} + P_{(x=2)} + P_{(x=3)} = 1 - 0{,}4333 = \mathbf{0,5667}$$

$$P_{(x=0)} = \frac{e^{-4}4^{0}}{0!} = 0{,}01831$$

$$P_{(x=1)} = \frac{e^{-4}4^{1}}{1!} = 0{,}0732$$

$$P_{(x=2)} = \frac{e^{-4}4^{2}}{2!} = 0{,}1465$$

$$P_{(x=3)} = \frac{e^{-4}4^{3}}{3!} = 0{,}1953$$