CAPITULO 2
REGRESION Y CORRELACION

2.1. REGRESION RECTILINEA EN UNA VARIABLE

2.1.1. El modelo de regresión rectilínea.

Las relaciones entre variables surgen como tema de interés en diversos campos de la investigación. a) ¿Cómo varían los precios con los años? b) ¿Cómo varía el peso de los animales con la edad? c) ¿Cómo se incrementa el rendimiento del trigo con el nivel de nitrógeno en el suelo? d) ¿Cómo evoluciona el peso de los niños menores a un año? e) ¿Cuál es la relación entre la edad de las personas y su presión sanguínea?

Las relaciones entre variables pueden ser graficadas y, en base a ello, se clasifican en rectilíneas y curvilíneas. Relaciones rectilíneas son las que se presentan cuando los incrementos de una variable (Y) son proporcionales a los de otra (X), y se expresan por fórmulas del tipo $Y = \alpha + \beta X$, donde α y β son parámetros que indican el valor de Y cuando X = 0, y el incremento de Y con la variación de una unidad de X, respectivamente.

Relaciones curvilíneas son las que se presentan cuando los incrementos en una variable dependiente frente a una variable independiente no son constantes sino que varían según el nivel de esta última. De acuerdo a nuestros objetivos, las relaciones curvilíneas pueden clasificarse en polinomiales y de otro tipo. Las relaciones polinomiales son aquellas que se expresan por polinomios de la forma: $Y = ß_0 + ß_1 X + ß_2 X^2 + ... + ß_k X^k$ de los cuales los más importantes son los de segundo y tercer grado (sin considerar el de primer grado que proporciona una recta):

$$Y = ß_0 + ß_1 X + ß_2 X^2$$

$$Y = ß_0 + ß_1 X + ß_2 X^2 + ß_3 X^3$$

Las relaciones del tipo no polinómico que más nos interesan son las asintóticas y exponenciales, como: $Y = \alpha.ß^X$; $Y = \alpha.X^\beta$;

o la de Mitscherlich: $Y = A[1-10^{-c(X+b)}]$.

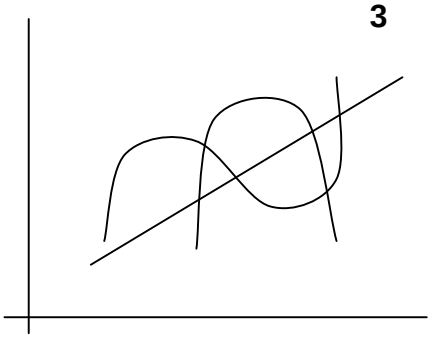


Figura 2.1.Funciones polinomiales

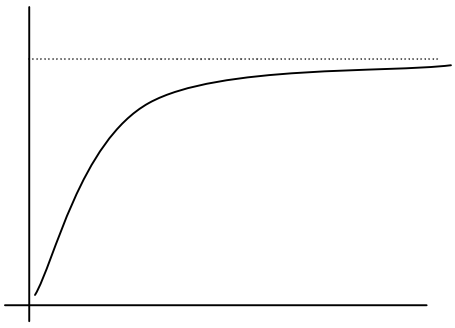


Figura 2.2.Función de Mitscherlich

Si la relación entre variables es perfecta, se puede considerar a una de ellas como variable independiente y, consecuentemente, a la otra como dependiente de la variación de aquella. Si llamamos a la primera X y a la segunda Y, se pueden obtener los valores de Y a partir de los de X, por lo que se dice que Y es función de X: Y = f(X). Este tipo de relación proporciona los llamados modelos determinísticos de explicación de la realidad. Para este tipo de modelo se pueden calcular los parámetros, en caso de no conocerlos, si se posee un número determinado de puntos.

Ejemplo 2.1. Conociendo que la circunferencia y el radio de los círculos son proporcionales, se puede establecer que: C = k . R, donde k es la constante de proporcionalidad desconocida. Si midiendo un círculo de radio 2 tiene 12,566 de circunferencia, es posible determinar experimentalmente la constante como k = 12,566/2 = 6,283.

Ejemplo 2.2. La equivalencia entre los grados para medir temperaturas de las escalas Fahrenheit y Centígrada no es generalmente recordada. No obstante, muchas veces se recuerda que el agua hierve a 212 °F y a 100 °C, de modo que postulando la relación °C= k.°F, se puede intentar despejar la constante. Una vez intentado, aparece claro que no es posible ya que los ceros de ambas escalas no coinciden. Esta es un situación particular de la regla general de que el ajuste de una recta exige dos puntos, por los menos. Si, exigiendo a la memoria, se recuerda que el agua congela a 0 °C y 32 °F se puede, ahora si, despejar la constante del sistema de ecuaciones:

0 °C ------ 32 °F

100 °C ------ 212 °F obteniendo °C = (5/9) °F.

Existe otro tipo de situación donde la relación entre variables no es perfecta sino promedial. Estas relaciones, que proporcionan los modelos probabilísticos de explicación de la realidad, se presentan con mucha frecuencia en las ciencias biológicas y en economía, donde el gran número de factores que afectan a las variables de interés impide la visualización de relaciones determinísticas entre ellas.

Ejemplo 2.3. Es natural pensar que el rendimiento de un cultivo es proporcional al nivel de nitrógeno en el suelo. No obstante ello, no siempre que se aumenta el nivel de nitrógeno en el suelo se incrementa el rendimiento de los cultivos, ya que otros factores pueden estar disminuyéndolo simultáneamente. La situación es que, en promedio, el rendimiento de los cultivos se incrementa con el nivel de nitrógeno de los suelos. Para cada nivel de nitrógeno los rendimientos de un cultivo forman una población. La distribución se dice condicional para ése nivel de nitrógeno. Las distribuciones condicionales difieren en la media, la que es mayor para niveles de nitrógeno más altos, como se muestra en la figura 2.3.

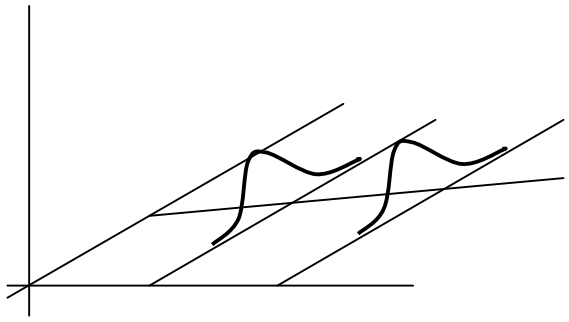


Figura 2.3. Modelo de regresión rectilínea.

2.1.2. Parámetros y estimadores

El modelo de regresión rectilínea en una variable es de la forma $Y_i = \alpha + ßX_i + \varepsilon_i$, donde Y_i representa los valores observados de la variable de interés, X_i representa valores observados de la variable independiente, los parámetros ß y α indican el incremento de rendimiento por unidad de variación de X, y el rendimiento cuando X vale cero, respectivamente: y finalmente ε_i indica un error no explicado y que se comporta como una variable aleatoria. Generalmente, se completa el modelo con el supuesto de que los errores provienen de una población con distribución normal, media cero, varianza finita, e independientes entre sí: $\varepsilon \sim$ NID(0, σ^2).

Los parámetros de los modelos de regresión son generalmente desconocidos y estamos interesados en conocerlos. El método adecuado de solucionar el problema implica estimar los parámetros del modelo mediante una muestra aleatoria. Se buscará obtener estimaciones de los parámetros y, con ellas, construir ecuaciones de predicción de la forma $\hat{Y}_i = a + bX_i$, con **a** como estimador de α y **b** como estimación de ß. El valor $\hat{Y}_i$ simboliza el valor predicho para Y cuando $X = X_i$, por la recta determinada por nosotros. Por lo tanto, es un estimador de $E(Y|X_i)$ el valor proporcionado por la verdadera relación. A la diferencia entre el valor observado Y_i y el predicho $\hat{Y}_i$, se le conoce como desvío o error de predicción $e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - a - bX_i$.

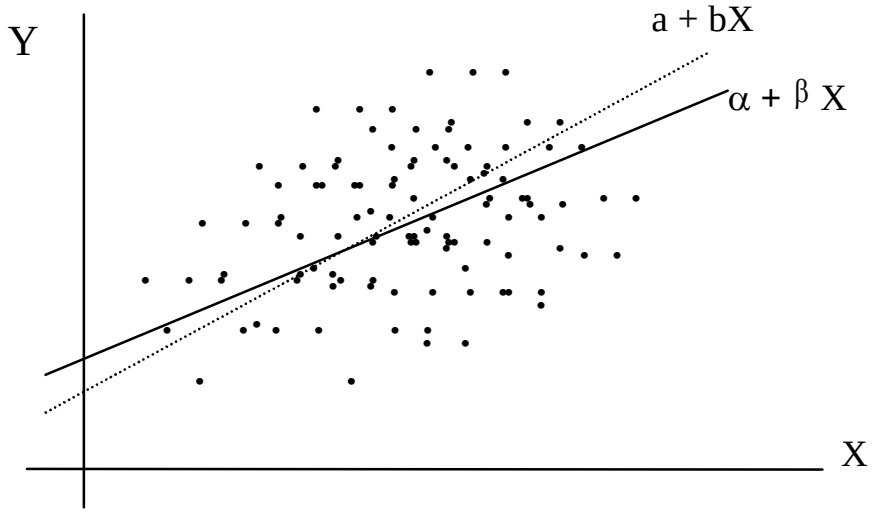


Figura 2.4. Línea de regresión y su estimación. La línea α+βX es imaginaria, la línea a+bX es la calculada por nosotros.

2.1.3. Estimación de los parámetros por mínimos cuadrados.

El problema de la estimación de los parámetros del modelo lineal se puede resolver adecuadamente por los métodos de máxima verosimilitud y de mínimos cuadrados. El método de máxima verosimilitud exige conocer la distribución de los errores del modelo: en tanto, el de los mínimos cuadrados no impone esa exigencia sino solamente que los errores sean incorrelacionados, con media cero y varianza común. Para el caso de distribución normal de los errores ambos métodos coinciden en los mismos estimadores, de modo que nos referiremos de preferencia al de los mínimos cuadrados que es intuitivamente más atrayente.

El método de estimación de mínimos cuadrados se basa en la técnica de aproximación similar, que postula como la recta de mejor ajuste a una serie de puntos, a aquella que minimice la suma de cuadrados de los desvíos o errores[1]:

$$SCE = \sum e^2_i = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - a - bX_i)^2$$

Esta suma de cuadrados es función de los valores de **a** y de **b**, de modo que según sean estos aquella tomará diferentes valores, existiendo un valor de cada uno de ellos que haga mínima la SCE. Entonces, la mejor recta será la que tenga como valores los que hagan simultáneamente mínima esa suma para **a** y **b**. Esos valores son obtenibles por derivación parcial:

$\partial SCE/\partial a = -2\ \Sigma(Y - a - bX) = 0$

$\partial SCE/\partial b = -2\ \Sigma(Y - a - bX)\ X = 0$

Los valores de a y b que cumplan con el sistema de ecuaciones anterior, cumplen con proporcionar la recta que tenga menor SCE, por lo cual, la importancia de este sistema es primordial en regresión; el sistema, conocido como de ecuaciones normales, se escribe generalmente del modo siguiente:

$$\Sigma Y = n\mathbf{a} + \mathbf{b}\ \Sigma X$$

$$\Sigma XY = \mathbf{a}\ \Sigma X + \mathbf{b}\ \Sigma X^2$$

y de él se pueden despejar los estimadores de α y de ß: $\mathbf{a} = \overline{Y} - b\overline{X}$

$$b = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sum (X - \overline{X})^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{\text{Covarianza}(x, y)}{\text{Varianza}(x)}$$

Uso de variables reducidas. Es muy útil tomar $x = X - \overline{X}$ $y = Y - \overline{Y}$. Por lo tanto la fórmula queda $b = \Sigma xy / \Sigma x^2$. Al reemplazar **a** por su valor, la ecuación de predicción $\hat{Y} = a + bX$ queda:

$\hat{Y} = \overline{Y} - b\overline{X} + bX = \overline{Y} + b(X - \overline{X}) = \overline{Y} + bx$

restando $\overline{Y}$ de ambos lados y llamando $\hat{y} = Y - \hat{Y} = b\ (X - \overline{X})$; tenemos: $\hat{y} = bx$

Esto corresponde con un modelo $Y = \mu_Y + \beta\ (X - \overline{X}) + \varepsilon$ donde se toma como parámetro la media de Y (y no α). Esta expresión del modelo se usa en algunas situaciones como en genética (ver ejemplo 2.14, pg 70) y una variante en los modelos de covarianza (sección 4.4).

Máxima verosimilitud. Si el modelo es Gauss Markov Normal el método de Máxima Verosimilitud proporciona los mismos estimadores que Mínimos Cuadrados.

[1] Omitiremos el uso del subíndice por simplicidad.

2.1.4. Fórmulas de cálculo.

Ejemplo 2.4. Peso vs. Edad en niños. Estos datos son artificiales basados en las curvas de crecimiento que publica el Ministerio de Salud Pública de Uruguay.

X	Y	x	y	x^2	y^2	xy	$\hat{Y}$	e	e^2
1	4	-3	-2,4	9	5,92	7,3	4,34	-0,34	0,12
2	5,9	-2	-0,5	4	0,28	1,07	5,04	0,86	0,74
3	4,7	-1	-1,7	1	3	1,73	5,74	-1,04	1,07
4	7,1	0	0,67	0	0,44	0	6,43	0,67	0,44
6	7,7	2	1,27	4	1,6	2,53	7,83	-0,13	0,02
8	9,2	4	2,77	16	7,65	11,1	9,22	-0,02	0,00
24	38,6	0	0	34	18,9	23,7	38,6	0	2,393
4	6,43	0	0	5,67	3,15	3,95	6,433	0	0,3988

Para calcular los estimadores **b** = 3,95/5,67=0,70 y **a** = $\overline{Y} - b\overline{X}$ = 6,43-(0,70)(4,0) = 3,65.

Por lo tanto, la función para predecir el peso a partir de la edad sería: $\hat{Y}_i$ = 3,65 + 0,70 X

Calculo abreviado. Conviene en este punto, introducir el concepto de que las cantidades de interés para cálculos de regresión son seis: Σx^2, Σy^2, Σxy, n, $\overline{X}$, $\overline{Y}$,
y salen de igual número de valores más en bruto: ΣX^2, ΣX , ΣY^2, ΣY , ΣXY, n
Recordemos que las primeras son sumas de cuadrados y productos corregidas (por media diferente de cero) y que se pueden calcular a partir de las correspondientes cantidades sin corregir, por medio de las llamadas fórmulas abreviadas de cálculo. En el presente ejemplo tenemos:

n = 6 ΣX = 24 ΣY = 38,6 ΣY^2 = 130 ΣY^2 = 267,24 ΣXY = 178,1	→	$\Sigma x^2 = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/ n = 130 - 24^2/6=34$ $\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/n = 267,24 - 38,6^2/6=18,9$ $\Sigma xy = \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/n = 178,1 - (24)(38,6)/6=23,7$	→	Σx^2 = 34 Σy^2 =18,9 Σxy = 23,7 $\overline{X}$ = 6 $\overline{Y}$ = 4 n = 6

Si bien las fórmulas de cálculo abreviado fueron desarrolladas principalmente para el trabajo con calculadoras, tienen un cierto valor interpretativo y conviene tenerlas presente aún cuando se usen otros medios de computación para procesar los datos. Las cantidades como ΣX^2 son llamadas sumas de cuadrados sin corregir, mientras que las del tipo Σx^2 son sumas de cuadrados corregidas (por media diferente de cero, como se dice a veces). La cantidad $C = (\Sigma X)^2/n$ se conoce como factor de corrección.

2.1.5. Inferencia sobre los coeficientes.

DISTRIBUCIÓN DE LOS ESTIMADORES. Los valores de los estimadores están construidos a partir de valores muestrales constituyendo, pues, variables que dependen de la muestra aleatoria elegida. Si se cumple el supuesto de normalidad de los errores, la distribución de los estimadores es normal. Encontraremos la esperanza y varianza de **b**:

$$E[b] = E\left[\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right] = \frac{1}{\sum x^2}\sum xE(Y) = \frac{1}{\sum x^2}\sum x(\alpha+\beta X) = \frac{\sum x\alpha}{\sum x^2} + \beta\frac{\sum xX}{\sum x^2} = \beta$$

$$V(b) = V\left[\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right] = \frac{1}{(\sum x^2)^2}V(\sum xy) = \frac{V(Y)\sum x^2}{(\sum x^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$$

De modo que b es un coeficiente que se distribuye normalmente en el muestreo (ver página 13), insesgadamente y con varianza $\sigma^2/\sum x^2$. Si se estandariza la distribución, tenemos: $z = \dfrac{b-\beta}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{\sum x^2}}}$

$$b \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum x^2})$$

y usando $\hat{\sigma} = \sqrt{(\sum e^2)/(n-2)}$ como estimador de σ_e, obtenemos una distribución t: $t = \dfrac{b-\beta}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum x^2}}}$

VARIANZAS DE LOS ESTIMADORES. Del mismo modo se puede demostrar que el estimador **a** tiene distribución normal, con media en α y varianza: $\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2})$. Otras varianzas se presentan en la tabla 2.1 al final de esta sección. En el ejemplo 2.4 las varianzas son:V[**b**] = 0,598/34 = 0,0176 y V[**a**] = 0,598 (1/6 + 4^2/34) = 0,381 y los errores estándar (las raices cuadradas de los anteriores) son: $\hat{\sigma}_b = 0{,}133$ y $\hat{\sigma}_a = 0{,}617$

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA PARÁMETROS. El conocimiento de la distribución permite elaborar intervalos de confianza para los parámetros. En efecto, si $P[-t_{(n-2;0,975)} < t_{(n-2)} < t_{(n-2;0,975)}] = 0{,}95$ entonces, tomando como ejemplo el parámetro ß,

$$P\left[-t_{(n-2;0,975)} < \frac{b-\beta}{\hat{\sigma}/\sqrt{\sum x^2}} < t_{(n-2;0,975)}\right] = 0{,}95$$

y despejando ß en la doble desigualdad entre paréntesis

$$P\left[b - t_{(n-2;0,975)}.\hat{\sigma}/\sqrt{\sum x^2} < \beta < b + t_{(n-2;0,975)}.\hat{\sigma}/\sqrt{\sum x^2}\right] = 0{,}95$$

obtenemos un intervalo de confianza para ß al 95%. En general, todos los intervalos de confianza serán de la forma $P\left[\hat{\theta} - t\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} < \theta < \hat{\theta} + t\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}\right] = \gamma$. En el ejemplo 2.4, un intervalo de confianza para

ß sería: $P[b-t_{(4)}\ \hat{\sigma}_b < ß < b+t_{(4)}\ \hat{\sigma}_b] = \gamma$ o sea que con números sería:

$$P[0,697-(2,776)(0,133) < ß < 0,697+(2,776)(0,133)] = P[0,328 < ß < 1,066] = 0,95$$

Mientras que para α sería: $P[a-t_{(4)}\hat{\sigma}_a < \alpha < a+t_{(4)}\hat{\sigma}_a] =$

$$P[3,645-(2,776)(0,617) < \alpha < 3,645-(2,776)(0,617)] = P[1,932 < \alpha < 5,358] = 0,95$$

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LA MEDIA CONDICIONAL. La media de valores de Y para un valor determinado de X, llamémosle X_0 es el resultado de reemplazar $X = X_0$ en la ecuación de regresión: 3,64+0,70(7) = 8,54. La varianza está en el cuadro abajo como: $\sigma_e^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum x^2}\right]$. Notemos que la precisión depende del cuadrado de la distancia entre X_0 y la media. Esto da lugar a cinturones de confianza curvilíneos.

INTERVALOS DE PREDICCIÓN. No olvidemos que uno de los principales objetivos de la regresión es predecir Y en función de X. La predicción puntual consiste en sustituir el valor de X en la función de regresión, pero si deseamos una predicción por intervalos tenemos que hacer una corrección a la fórmula de la varianza para la media condicional:

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 = \sigma_e^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum(X-\overline{X})^2}\right]$$

En este caso queda:

$$P[8,54-(2,776)(0,937) < Y^* < 8,54-(2,776)(0,937)] = P[5,97 < Y^* < 11,11] = 0,95$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LOS COEFICIENTES. Si queremos probar H_0: ß= 0 vs H_A: ß≠0 usamos como variable $t = \frac{b-\beta}{\hat{\sigma}_b}$ = 0,70 / 0,13 = 5,25**. Comparando con el valor crítico $t_{(0,975;4)}$= 2,776 vemos que el valor calculado cae en la región crítica, eso se señala con los dos asteriscos. Es decir que se rechaza H_0, por lo tanto se concluye que ß es diferente de 0. Notemos que el intervalo de confianza en la sección anterior no incluye el valor cero.

Si se quiere probar H_0: $\alpha = 0$

H_A: $\alpha \neq 0$

la variable es $t = \frac{a-\alpha}{\hat{\sigma}_a} = \frac{3,65}{0,62}$ = 5,90**

lo que es significativo, es decir se rechaza H_0 y se decide que α =0. También acá vemos que el intervalo de confianza no incluye al valor cero.

Muchas veces en el proceso de una prueba de hipótesis se considera mejor reportar el "p-value" como se hace en la página 72, y que el lector decida el nivel de significación que utilizará. Este

aspecto ya fue discutido en la sección 1.2.2 (página 16).

Tabla 2.1. Varianzas de los estimadores.

Coeficiente		Varianza
b	Pendiente de la línea de regresión	$\sigma_e^2\left[\frac{1}{\sum x^2}\right]$
A	Ordenada en el origen.	$\sigma_e^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}\right]$
μ	Media de la variable de interés	$\sigma_e^2\left[\frac{1}{n}\right]$
$a+bX_0$	Media condicional para $X=X_0$	$\sigma_e^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum x^2}\right]$
Predicción	condicional para $X=X_0$	$\sigma_e^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum x^2}\right]$

2.1.6.Análisis de varianza para la regresión rectilínea.

La técnica de análisis de varianza se desarrollará, como es habitual, descomponiendo la variación total y logrando estimadores independientes de la varianza poblacional, comparables por la prueba F.

PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS. Cada observación es igual a la media, más un aporte de la regresión con X, más un error:

$$Y_i = \overline{Y} + bx_i + e$$

elevando al cuadrado y tomando la suma de los cuadrados de todas las observaciones:

$\sum Y^2 = n\overline{Y}^2 + b^2 \sum x^2 + \sum e^2$ + 2 productos que se anulan.

Esta desigualdad se estudia generalmente restando $n\overline{Y}^2$ de ambos lados y recordando que $\sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2 = \sum (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum y_i^2$ por lo que tenemos:

$\sum y^2 = b^2 \sum x^2 + \sum e^2$

tomando los siguientes nombres SC = $\sum y^2$; SCE = $\sum e^2$ y SCR = $b^2 \sum x^2$,

podemos escribir SC=SCR+SCE. Esta última expresión nos dice que la suma de cuadrados de los valores de la variable de interés se pueden descomponer en una parte debida a la regresión (SCR), y otra, no explicada por el modelo, debido al error (SCE).

HOMOGENEIDAD DE LOS ESTIMADORES. La suma de cuadrados de la regresión tiene un grado de libertad. En efecto,

$\varepsilon = Y - \mu - ß\,x$ sumando y restando $\hat{Y} = \overline{Y} + b(X - \overline{X})$ tenemos:

$= Y - \mu - ß\,x - \hat{Y} + \overline{Y} + b\,x$ y reorganizando esa expresión:

$= (Y - \hat{Y}) + (\overline{Y} - \mu) + (b - ß)\,x$

Si ahora elevamos al cuadrado de ambos lados y tomamos sumatorias, tenemos:

$\sum \varepsilon^2 = \sum (Y - \hat{Y})^2 + n(\overline{Y} - \mu)^2 + (b - ß)^2 \sum x^2$ + productos que se anulan.

Dividiendo por σ^2, tenemos una variable χ^2:

$$\frac{\sum \varepsilon^2}{\sigma^2} = \frac{\sum e^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{Y} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum x^2 (b - \beta)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\sum \varepsilon^2}{\sigma^2} = \frac{\sum e^2}{\sigma^2} + \frac{(\overline{Y} - \mu)^2}{\sigma^2 / n} + \frac{(b - \beta)^2}{\sigma^2 / \sum x^2}$$

La expresión de la izquierda es una χ^2 con n grados de libertad, las dos últimas de la derecha tambien son χ^2 con 1 grado de libertad cada una, y como, $\chi^2_n = \chi^2_{(n-2)} + \chi^2_{(1)} + \chi^2_{(1)}$ la suma de cuadrados del error tiene distribución χ^2 con (n-2) grados de libertad. Por lo tanto, el cociente entre SCR/1 y SCE/(n-2) tiene distribución F bajo el supuesto de que ß=0:

$$\frac{SCR/1}{SCE/(n-2)} = \frac{CMR}{CME} \sim F^1_{n-2}$$

Esta distribución posibilita probar la hipótesis de que ß=0. Todo esto generalmente se presenta en una tabla de análisis de la varianza.

Fuente Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	F
Regr.rectilínea	SCR = b ∑xy	1	SCR/GLR	CMR/CME
Error o desvíos	SCE = ∑e²	n - 2	SCE/GLE	
TOTAL	SC = ∑y²	n - 1		

En el ejemplo 2.4 tenemos:

Fuente Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	F
Regr.rectilínea	16,52	1	16,52	27,61
Error o desvíos	2,39	4	0,60	
TOTAL	18,91	5		

Probar la hipótesis ß=0 por la prueba t y la F es totalmente equivalente al ser: $t^2_{(n-2)} = F_{(1,n-2)}$

$$t^2 = \left(\frac{b - \beta}{\hat{\sigma} / \sqrt{\sum x^2}} \right)^2 = \frac{(b - \beta)^2 \sum x^2}{\hat{\sigma}_e^{\,2}} = \frac{CMR}{CME} = F_{(1,n-2)}$$

en este caso $5,25^2 = 27,61$.

2.1.7. <u>Valoración de la regresión</u>.

a. La línea de regresión determinada no tiene valor fuera del rango de variación de los datos que permitieron estimarla. Intentar extrapolar los resultados implica suponer que la relación se mantendrá; lo cual es un supuesto que no tiene ningún método estadístico de análisis para probarlo. Extrapolar implica asumir un riesgo que solo en casos excepcionales podrá justificarse por la naturaleza del problema.

b. La determinación de una línea de regresión y de una relación entre variables no implica, de modo alguno, encontrar una relación de causalidad entre las variables. Pueden determinarse ajustes excelentes entre variables que no tienen ninguna relación en lo que a veces se denomina correlaciones espurias. Este tipo de situación muchas veces se presenta cuando ambas variables se relacionan con una tercera, por ejemplo el tiempo.

c. La existencia de un coeficiente de correlación rectilínea no significativo no implica independencia, excepto en el caso de que ambas variables se distribuyan según una normal bivariante. Puede existir una relación de un tipo que no sea la rectilínea, por ejemplo cuadrática, y el coeficiente ser nulo o cercano a cero.

2.2. REGRESIÓN MÚLTIPLE.

2.2.1.El panorama de la regresión múltiple.

Las variables de mayor interés en biología y otras ciencias dependen generalmente de varios factores. El comportamiento de una variables de interés (por ejemplo el rendimiento de un cultivo) frente a variaciones de las variables independientes es el tema de la regresión múltiple.

Ejemplo 2.5. El rendimiento de una pastura es una variable que está influida por una gran cantidad de factores: temperatura, humedad, luz, disponibilidad de los diferentes nutrientes como nitrógeno, fósforo, potasio, etc. intensidad y época de pastoreo, y muchos otros estarán influyendo para que el rendimiento obtenido sea ése y no otro. Si se conoce como reacciona la pradera al agregado de N, P, o K se puede determinar rendimientos para distintos agregados de cada uno y en base a ello decidir cual o cuales conviene utilizar. El conocimiento de la variación del rendimiento frente a cambios de valor de otra variable como tenor de N, P, o K del suelo se expresa generalmente como una función de repuesta. Si Y = f(N) la función de respuesta sería una línea que se puede graficar en el plano, si Y = f(N,P) la función de respuesta sería un plano que debe representarse en el espacio; finalmente para función de más de dos variables como Y = f(N, P, K) la representación gráfica es imposible en el espacio de tres dimensiones y se habla de hiperplanos.

Ejemplo 2.6. Una función de respuesta del tipo mencionado puede ser: $Y = ß_0 + ß_1 X_1 + ß_2 X_2 + \varepsilon$ donde $ß_1$ es el incremento de Y por unidad de X_1, $ß_2$ es el incremento de Y por unidad de X_2, y $ß_0$ es el valor de Y cuando X_1 y X_2 son nulas. La gráfica de una función como esa sería como la mostrada en la figura 2.5.

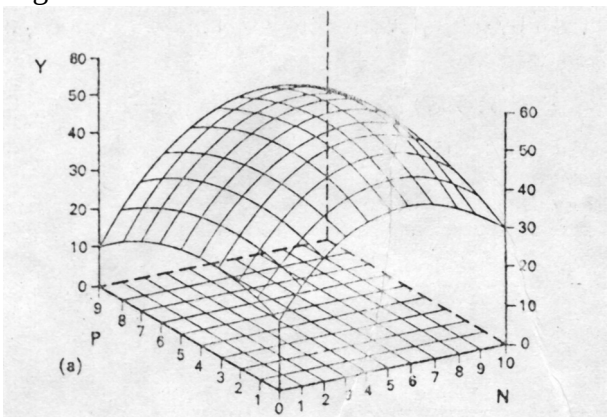


Fig. 2.5. Representación gráfica de una función de dos variables.

Ejemplo 2.7. Una función de respuesta es: Y = 1.000 + 200 N + 250 P. La ecuación expresa que por cada kilo de nitrógeno agregado se incrementa el rendimiento de la pastura en 200 kg y por cada kilo de fósforo en 250 kg, siendo el rendimiento de 1.000 kg cuando no se fertiliza.

En este tipo de situaciones no se puede postular la existencia de una función matemática entre el rendimiento y los niveles de fertilidad ya que todos los demás factores que condicionan el rendimiento distorsionan la relación. Por ello es que se postula en cambio la existencia entre variables de una función de regresión, es decir que el promedio de los valores de rendimiento está en función de los niveles de fertilidad.

2.2.2. Modelo de regresión múltiple y matrices.

El modelo de regresión múltiple es:

$$Y_i = ß_0 + ß_1 X_{1i} + ß_2 X_{2i} + ... + ß_k X_{ki} + \varepsilon_i$$

donde Y_i es la observación i-ésima de la variable aleatoria Y

$ß_j$ son parámetros: los coeficientes de regresión parcial es decir el incremento de la variable rendimiento por cada unidad de incremento de la variable Xj.

X_j son variables matemáticas no aleatorias

ε representa un error aleatorio que generalmente se supone proviene de una distribución normal con media cero, varianza finita y que es independiente del valor de cada X_j : $\varepsilon \sim NID(0;\sigma^2)$.

Es usual tomar una variable X que siempre valga 1: $X_0=1$, con lo que se puede abreviar la escritura del modelo: $Y_i = \sum_{j=0}^{k} B_j X_{ji} + \varepsilon_i$

y el modelo expresa que para un conjunto de valores de las X_j que se consideran los valores de Y que tienen una distribución normal con media en $E[Y|x] = \sum ß_j X_j$ y con varianza σ_E^2. La media así considerada se llama condicional pues es la media para ése conjunto de valores de las variables independientes y cambiará al cambiar estos. El conjunto de las medias condicionales formaría el plano de regresión.

La principal finalidad en el planteamiento de un modelo es determinar estimaciones de los parámetros de modo que se pueden encontrar fórmulas de predicción de los valores de la variable de interés a partir del conocimiento de los valores de las variables independientes. En general, nos interesa conocer los coeficientes de regresión parcial (los b), probar si esos coeficientes son cero (individualmente), probar la significación del modelo (probar si los coeficientes son todos cero), construir intervalos de confianza para esos coeficientes, y hacer predicciones puntuales y por intervalos.

La regresión múltiple está asociada al uso de matrices. El modelo se puede escribir matricialmente como **Y** = **X ß** +ε o sea:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ ... \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & ... & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & ... & X_{2k} \\ ... & & & \\ X_{k1} & X_{k2} & ... & X_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ ... \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

#

2.2.3.Estimaciones por mínimos cuadrados y ecuaciones normales.

Llamemos $\hat{Y} = \sum b_j X_j$ a la ecuación de predicción que buscamos. En ella b son las estimaciones de los coeficientes. Cada valor predicho se separaría del valor observado correspondiente en una cantidad que llamaremos error de predicción y simbolizaremos con e: $\hat{e} = Y - \hat{Y}$

El criterio de los mínimos cuadrados propone como mejores estimadores de los parámetros a los valores de b que cumplan con que los desvíos e tienen una suma de cuadrados mínima. Como:

$$e = Y - \hat{Y} = Y - \sum_j b_j X_j$$

$$\sum e^2 = \sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum (Y - \sum_j b_j X_j)^2$$

la suma de cuadrados del error es función de los valores de b; derivando con respecto a b se encuentran los valores de estimadores que minimizan la suma de cuadrados del error. Esos valores son los que cumplen con las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}
&nb_0 + b_1\sum X_1 + b_2\sum X_2 + \ldots + b_k\sum X_k = \sum Y \\
&b_0\sum X_1 + b_1\sum X_1^2 + b_2\sum X_1X_2 + \ldots + b_k\sum X_1X_k = \sum X_1Y \\
&b_0\sum X_2 + b_1\sum X_1X_2 + b_2\sum X_2^2 + \ldots + b_k\sum X_2X_k = \sum X_2Y \\
&\quad \ldots\ldots \\
&b_0\sum X_k + b_1\sum X_1X_k + b_2\sum X_2X_k + \ldots + b_k\sum X_k^2 = \sum X_kY
\end{aligned}$$

Se logra recordar más fácilmente las k ecuaciones normales si se observa que resultan de multiplicar la ecuación de predicción sucesivamente por 1, X_1, X_2, ... , X_k y tomar sumatorias. Los valores buscados de las estimaciones se obtienen despejando del sistema de ecuaciones normales.

A veces recién en este momento el lector se da cuenta de la conveniencia de usar matrices. Las ecuaciones normales son: **X'X b = X'Y** donde

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 & \ldots & \sum X_K \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 & \ldots & \sum X_1X_k \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 & \ldots & \sum X_2X_k \\ \ldots & & & & \\ \sum X_K & \sum X_kX_1 & \sum X_kX_2 & \ldots & \sum X_k^2 \end{bmatrix}; \; b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \; X'y = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1Y \\ \sum X_2Y \\ \ldots \\ \sum X_kY \end{bmatrix}$$

Recapitulando lo visto hasta acá en notación matricial tenemos

El modelo **Y = X b**, los errores son: **e = Y - $\hat{Y}$ = Y - Xb**

la suma de cuadrados del error es: $\sum e^2 = \sum (Y - \hat{Y})^2 =$ **(Y - Xb)' (Y - Xb)**

las ecuaciones normales: **X'X b = X'Y** #

Las ecuaciones normales tienen una estructura muy simple, la solución es $\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$. Si el modelo no fuera lineal no pasaría eso, las ecuaciones no-lineales no tienen una solución explícita. El PROC NLIN de SAS ajusta regresiones no-lineales.

2.2.4. Recursos de cálculo. Ecuaciones reducidas.

Generalmente se percibe mejor la situación a través de un ejemplo.

Ejemplo 2.8. A los efectos de estudiar la influencia de la fertilización NP en praderas naturales se tomaron observaciones de rendimiento bajo diferentes niveles de fertilización. Los resultados se muestran en la tabla.

Tabla 2.1. Rendimiento de praderas naturales sobre Basalto con fertilización NP.

N	P	Y
80	80	1125
80	240	1135
240	80	1345
240	240	2185
160	160	1435
0	160	480
320	160	1895
160	0	850
160	320	2250
0	0	505
0	320	615
320	0	860
320	320	3290

Las ecuaciones normales son:

$$13\ b_0 + 2.080\ b_1 + 2.080\ b_2 = 17.970$$
$$2.080\ b_0 + 512.000\ b_1 + 332.800\ b_2 = 3{:}688.000$$
$$2.080\ b_0 + 332.800\ b_1 + 512.000\ b_2 = 3{:}573.600$$

De ese sistema de ecuaciones se pueden despejar los coeficientes y la función queda:

$$\hat{Y} = 33{,}02 + 4{,}54\ N + 3{,}90\ P$$

En ese sistema de ecuaciones hemos colocado con color rojo las cantidades que dependen de las X´s, notemos que forman una matriz de 3 filas y 3 columnas, que llamamos la matriz X´X. Los términos a la derecha del signo de igual (términos independientes) están en verde y son las cantidades que dependen de las Y´s, se conocen como vector (columna) X´y de 3 elementos. Por tanto X´X b = X´y

ECUACIONES REDUCIDAS. El uso de variables reducidas: $x_1 = X_1 - \overline{X}_1$; $x_2 = X_2 - \overline{X}_2$; e $y = Y - \overline{Y}$ facilita el manejo de las ecuaciones normales. El sistema se puede escribir

$$b_1 \Sigma x_1^2 + b_2 \Sigma x_1 x_2 = \Sigma x_1 y$$
$$b_1 \Sigma x_1 x_2 + b_2 \Sigma x_2^2 = \Sigma x_2 y$$

obteniéndose una ecuación y una incógnita menos. En el presente ejemplo nos da:

$$179.200\ b_1 + 0\ b_2 = 812.800$$
$$0\ b_1 + 179.200\ b_2 = 698.400$$

De donde despejamos los coeficientes b_1 y b_2 obteniendo los mismos valores que antes. El coeficiente b_0, se puede obtener de la expresión: $b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2$. El hecho de que $\Sigma x_1 x_2 = 0$ se debe a la ortogonalidad de X_1 y X_2 en este ejemplo fue intencional.

2.2.5. Análisis de varianza.

El análisis de varianza consiste en separar la SC total (corregida) en dos partes: una debida a la regresión (SCR) y otra debida al error (SCE) para compararlas y de se modo probar la hipótesis de que los coeficientes del modelo son todos cero.

La suma de cuadrados del error constituye una medida de la dispersión de los datos no explicada por el modelo y según la ecuación es SCE = **e'e** = **(y-xb)' (y-xb)** = y'**y** - **b'x'y**, y como: SC = y'**y** y SC = SCR + SCE, tenemos que SCR = **b'x'y**.

La expresión SC = SCR + SCE se conoce como partición de la suma de cuadrados total en dos partes ortogonales o independientes: una atribuible al modelo de regresión y una al error. Este resultado posibilita el estudio de la significación de la regresión por medio de una prueba F. El análisis de varianza es generalmente presentado en una tabla como la que sigue.

Si no se trabaja con las variables reducidas, tenemos:

Fuente Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	F
Regresión	**b'x'y**- $(\Sigma Y)^2/n$	k - 1		
Error o residuo	por diferencia	n – k		
TOTAL	y'**y** - $(\Sigma Y)^2/n$	n – 1		

La suma de cuadrados de la regresión se calcula multiplicando el vector de los coeficientes por el vector de los términos independientes de las ecuaciones normales. A este resultado hay que restarle el factor de corrección. Si se trabaja con las variables reducidas, la diferencia es que no tenemos que restarle factor de correción:

Fuente Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	F
Regresión	**b'x'y**	k - 1		
Error o residuo	por diferencia	n – k		
TOTAL	**y'y**	n – 1		

La suma de cuadrados de la regresión se calcula multiplicando el vector de los coeficientes por el vector de los términos independientes de las ecuaciones normales.

En el ejemplo tenemos una ΣY^2 = 32:999.700 de modo que la suma de cuadrados total es:
SC = Σy^2 = 32:999.700 -$(17.970)^2/13$= 8:159.630,77
La Suma de Cuadrados de la Regresión se puede calcular fácilmente usando las variables reducidas:
SCR = $b_1\Sigma x_1y + b_2\Sigma x_2y$ = (362,86)(10.160) + (311,79)(8.730) =
= 3:686.628 + 2:721.889 = 6:408.584
La Suma de Cuadrados del Error (SCE) se calcula por diferencia:
SCE = SC - SCR = 8:159.630 - 6:408.584 = 1:751.046

Fuente Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	F
Regresión	6:408.517	2	3:204.258	18,30
Error o residuo	1:751.046	10	175.104	
TOTAL	8:159.630	12		

Coeficiente de determinación. El R^2, llamado coeficiente de determinación, se calcula como la Suma de Cuadrados de la Regresión dividido la Suma de Cuadrados total. En este ejemplo el R^2 es 6:408.517/8:159.630 = 0,78. Se interpreta el R^2 diciendo que el 78% de la variación en rendimiento de la pastura está asociada con el contenido de nitrógeno y fósforo.

Análisis de varianza secuencial. El procedimiento de análisis secuencial consiste en ajustar modelos cada vez más complicados y analizar como aumenta el poder explicativo del modelo. El procedimiento puede resumirse así:
Se ajusta el modelo con nitrógeno y fósforo: SCR(n,p)
Se ajusta el modelo solo con nitrógeno: SCR(n),
Se hace la diferencia SCR(n,p)-SCR(n)=SC(p | n). Esta suma de cuadrados indica cuanto aumenta el poder explicativo del modelo que tiene nitrógeno cuando se agrega fósforo.

En el presente ejemplo tenemos:
SCR(n,p) = 6:408.517 con un R^2 de 0,78
SC(n) = 3:686.628 con R^2=0,45
Diferencia = 2:721.889 con R^2 adicional de 0,33.
El agregado del fósforo al modelo con nitrógeno aumenta el poder explicativo de 0,45 a 0,78 o sea un 33%.

La *suma de cuadrados secuencial* es la que resulta de este proceso, SAS la llama Suma de Cuadrados tipo I. La *suma de cuadrados marginal* es la que resulta si esa variable es la última en entrar en el modelo, esta suma de cuadrados es identificada por SAS como Suma de Cuadrados tipo III. En este ejemplo en particular tenemos que la suma de cuadrados tipo I es igual a la tipo III ("el total es igual a la suma de las partes"), esta situación es debida a la ortogonalidad de los efectos que ya hemos mencionado y no siempre ocurre. En el ejemplo de la sección siguiente se verá una situación diferente (ejemplo 2.12 de la sección 2.3.2).

2.2.6. Regresión polinomial.

Las funciones de regresión del tipo polinomial son: $Y = ß_0 + ß_1 X + ß_2 X^2 + ... + ß_k X^k + ε$. Definiendo a las sucesivas potencias de la variable X como diferentes variables se puede realizar el estudio de los polinomios de regresión con los métodos de regresión multivariante que estamos estudiando: $X_2 = X^2$; $X_3 = X^3$; ... ; $X_k = X^k$.

Los polinomios más importantes son los de primer grado (que da una línea recta y generalmente no se menciona como polinomio) y de segundo grado que proporciona gráficamente una parábola. La importancia de la parábola radica en estudios como los de fertilidad de suelos en que interesa el valor de la variable que produce un máximo rendimiento, para lo cual se asume como conocido que la respuesta a fertilización no continúa por siempre.

Ejemplo 2.9. Ajustar una parábola de la forma $Y = ß_0 + ß_1 N + ß_2 N^2 + ε$ a los datos del ejemplo 2.8.

Las ecuaciones normales son:

$$13\ b_0 + 2.080\ b_1 + 512.000\ b_2 = 17.970$$
$$2.080\ b_0 + 512.000\ b_1 + 139:264.000\ b_2 = 3:688.000$$
$$512.000\ b_0 + 13:9264.000\ b_1 + 40140:800.000\ b_2 = 952:896.000$$

Despejando se obtienen los coeficientes:

$b_0 = 548,00664452$ $b_1 = 7,4766057586$ y $b_2 = -0,009190286$

con menos decimales la regresión es $\hat{Y} = 548,01 + 7,48\ N - 0,0092\ N^2$

Anova secuencial. En el presente ejemplo tenemos:

Fuente Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	F
Regresión	3:823.946	2	1:911.973	4,41
Error o residuo	4:335.685	10	433.569	
TOTAL	8:159.631	12		

$SCR(N,N^2)$ = 3:823.946 con un R^2 de 0,47

SC(N) = 3:686.629 con R^2=0,46

Diferencia $R(N^2 \mid N)$ = 137.317 con R^2 adicional de 0,01.

El agregado del término cuadrático al modelo con efecto lineal de nitrógeno aumenta el poder explicativo de 0,46 a 0,47 o sea un 1%. Ese aumento no es significativo (p=0,59) de modo que concluimos que la respuesta es lineal. El término lineal es significativo (p=0,0154) de modo que hay una respuesta significativa al nitrógeno. La suma de cuadrados marginal $(N \mid N^2)$ es 815.281 con p=0,2003. La mayoría de los investigadores considera que no tiene sentido un modelo con efecto cuadrático y sin efecto lineal.

2.2.7. Intervalos de confianza para los parámetros.

Además de la estimación puntual que hemos analizado se pueden construir intervalos de confianza para los parmetros del modelo de regresión utilizando el conocimiento de la distribución de los estimadores que da la teoría. Si se cumplen los supuestos del modelo el vector de estimadores tiene una distribución: $\mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{ß}; \sigma^2[X'X]^{-1})$. De modo que cada estimador se distribuye con media en el parámetro que estima con distribución y varianza conocidas: $b_j \sim N(ß_j; \sigma^2 c_{jj})$. La varianza del estimador es pues la del error multiplicada por c_{jj} el elemento de la j-ésima columna y fila de la matriz $[X'X]^{-1}$. La distribución normal de los estimadores posibilita su estandarización: $\frac{b-\beta}{\sigma / c_{ii}} = z \sim N(0,1)$ y reemplazando el parámetro σ^2, generalmente desconocido, por una estimación (la del residuo en el análisis de varianza) tenemos: $\frac{b-\beta}{\hat{\sigma} / c_{ii}} = t_{(n-k)}$ que es la distribución generalmente utilizada para construir los intervalos de confianza. Estos intervalos de confianza serán de la forma: $P[b_j - t.\ \hat{\sigma}\sqrt{c_{jj}} < ß_j < b_j + t.\ \hat{\sigma}\sqrt{c_{jj}}] = \gamma$

En el ejemplo 2.8: $[X'X]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}3626 & -0{,}0009 & -0{,}0009 \\ -0{,}0009 & 0{,}000005 & 0 \\ -0{,}0009 & 0 & 0{,}000005 \end{bmatrix}$

de modo que: $b_0 \sim N(ß_0;\sigma^2/13)$

$b_1 \sim N(ß_1; \sigma^2/28)$

$b_2 \sim N(ß_2; \sigma^2/28)$

por lo tanto un intervalo de confianza para $ß_1$, por ejemplo, será: $P[\ b_1 - t\hat{\sigma} < ß_1 < b_1 + t\hat{\sigma}\ ] = \gamma$

que para el 95% de confianza es: $P\ [362{,}86 - (2{,}23)(79{,}08) < ß_1 < 362{,}86 + (2{,}23)(9{,}08)] = 0{,}95$

o? $P\ [186{,}51 < ß_1 < 539{,}21] = 0{,}95$

Prueba de hipótesis con un solo grado de libertad.

Si tenemos el coeficiente y su error estándar, podemos docimar la hipótesis de que el coeficiente poblacional es cero por medio del test t: $t = b/\hat{\sigma}_b$

Por ejemplo para probar que $\beta_1 = 0$ tenemos que t = 4,535/0,989= 4,588 lo que es significativo al 5%. La prueba t tiene que dar coincidente con la prueba F, ya que $F^1_n = t^2_{(n)}$. Para β_1: $4{,}588^2 = 21{,}05$ del mismo modo para β_2: $3{,}943^2 = 15{,}54$.

2.2.8. Funciones lineales y predicciones.

Se puede demostrar que las funciones lineales de los parámetros del tipo: $l = \Sigma a_j b_j = \mathbf{a'b}$ tienen la siguiente varianza y esperanza:

$E[l] = \Sigma c_j ß_j$ $\quad\quad$ $V[l] = \sigma^2 \mathbf{a'[X'X]^{-1} a}$

Este conocimiento se puede utilizar a los efectos de confeccionar intervalos para las predicciones, ya que son casos particulares de los anteriores donde $\mathbf{a}=\mathbf{x_0}$: $E[Y] = \mathbf{x_0.b}$

$P\{x_0.b\text{-}t.\ \sqrt{\sigma^2[1+\mathbf{x_0\,(X'X)^{-1}\,x_0}]} < Y < \mathbf{x}_0.b+t.\ \sqrt{\sigma^2[1+\mathbf{x_0\,(X'X)^{-1}\,x_0}]}\}=\gamma$

En el ejemplo si se desea predecir el rendimiento que se obtendría con 80 kg de P_2O_5 y sin nitrógeno, tenemos:

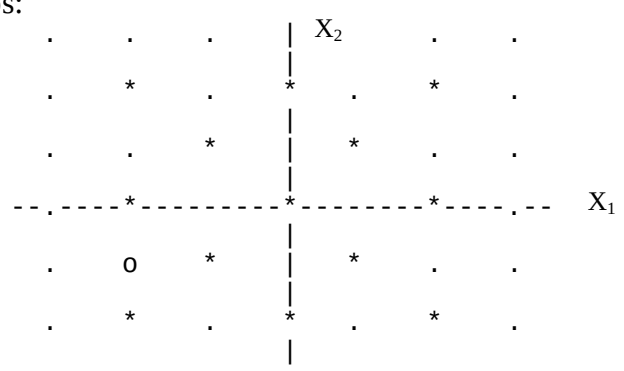


Fig 2.6. Representación de los valores de fertilización con rendimiento observado (*) y con rendimiento a predecir (o).

$X_1 = (0\text{-}160)/80 = -2$ y $X_2 = (80\text{-}160)/80 = -1$

$\hat{Y}_C = 1.382 + 362{,}86\ (-2) + 311{,}79\ (-1) = 344{,}8$. La varianza de la predicción será

$$V[\hat{Y}_C] = [x_C[X'X]^{-1}x_C]\ \sigma^2 = \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}3626 & -0{,}0009 & -0{,}0009\\ -0{,}0009 & 0{,}000005 & 0\\ -0{,}0009 & 0 & 0{,}000005\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -1\end{bmatrix}\ [1\ \ -2\ \ -1] = 93$$

$\sigma^2/364$

$$V[\hat{Y}_C] = \frac{93}{364}\,\sigma^2 = \frac{93}{364}\ (175.104{,}65) = 44.738{,}274$$

la raíz cuadrada de lo cual proporciona el error estándar: $\sqrt{44.738{,}274} = 211{,}51$

el intervalo de confianza para la media condicional será:

$$P\left[Y_c - t\sigma\hat{Y} < \frac{\mu Y}{x} < Y_c + t\sigma\hat{Y}\right] = P\left[344{,}8 - (2{,}23)(211{,}51) < \frac{\mu Y}{x} < 344{,}8 + (2{,}23)(211{,}51)\right]$$

$$= P\left[-126.88 < \frac{\mu Y}{x} < 816{,}47\right] = 0{,}95$$

Mientras que la predicción tiene varianza: $V[Y_C] = (1 + \mathbf{x'_C[X'X]^{-1}x_C})\ \sigma^2 = (1 + \frac{93}{364})\ \sigma^2 = \frac{457}{364}\ \sigma^2 = \frac{457}{364}\ (175.104{,}65) = 219.842{,}92$ y entonces: $\sqrt{219.842{,}92} = 468{,}87$ con lo que el intervalo de predicción queda: $P[\ Y_C - t_Y < Y < Y_C + t_Y\ ] =$

$$P[\ 344{,}8\ \ 2{,}23\ x\ 468{,}87 < \dot{Y} < 344{,}8 + 2{,}23\ x\ 468{,}87] = P[\ 700{,}79 < \dot{Y} < 1390{,}39\ ]$$

$$= 0{,}95$$

2.2.9. Diseño de experimentos para estudios de superficies de respuesta.

Las funciones de varias variables se llaman superficies de respuesta. Algunos de los elementos analizados hasta acá nos permiten valiosas conclusiones. Notemos algunos puntos:

1. La precisión del intervalo de confianza es diferente para los distintos puntos del plano, es decir para las diferentes combinaciones X-Y (fertilizaciones en el ejemplo 2.8). Cuando intentemos lograr igual precisión buscaremos los diseños rotables.
2. Ya habíamos hablado antes de evitar la extrapolación. En un estudio de regresión múltiple, los puntos a predecir deben ubicarse en la región estudiada, algunas veces se cae en la extrapolación sin darnos cuenta.
3. Valores de rendimiento negativos aparecen en los intervalos de confianza, lo que no es lógico y muestra la no significación de los coeficientes (es decir que un valor probable es cero)

El cumplimiento de las propiedades de la recta de regresión comentadas presenta puntos a ser tenidos en cuenta en el diseño de un estudio de regresión. Según lo que hemos visto la varianza de la predicción del valor de Y cuando X=xo es proporcional a: $CME\left[\frac{1}{n}+\frac{x_0^2}{\sum X^2}\right]$

de modo que, al aumentar la distancia entre X_0 y la media, aumenta x_o^2 y, por ende, todo el radio del intervalo de confianza. Este tipo de situación implica menor precisión, por lo que al diseñar un experimento debe buscarse que el promedio de los valores de X caiga en las cercanas del valor de X_0 para el cual interesa realizar predicción. Es decir, deben tomarse valores de X a ambos lados del valor que interesa predecir. El hecho de que los valores de X están distantes entre si contribuye a una mayor precisión, ya que esto hace que $\Sigma x^2 = \Sigma(X-X)^2$ aumente, con lo que disminuye el factor arriba presentado y se estrecha el intervalo de confianza para la predicción. Por el contrario, si se desea estudiar la curvilinearidad de una regresión, puede interesar que los valores de la variable independiente están a distancias equidistantes, en todo el rango de interés de la variable. En el capitulo 5 nos dedicaremos a estudiar con más detalle este tipo de temas, pero adelantamos algunos conceptos.

Importancia de la ortogonalidad. La ortogonalidad de los factores asegura que la suma de los productos es cero, por lo tanto facilita los cálculos y las interpretaciones. Muchos investigadores no se toman el trabajo de buscar ortogonalidad y luego se quejan de la dificultad de interpretar situaciones con variables no ortogonales. Tampoco es una cosa que no se puede vivir sin ella, solo que hay que sobrellevar las consecuencias. En los "observational studies" la falta de ortogonalidad no se puede eludir y es una de las características de tales estudios.

2.3. CORRELACION.

2.3.1. Correlación y regresión.

La relación entre el coeficiente de correlación r y el coeficiente de regresión b es muy estrecha.

$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$ y $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$ (ver sección 1.1.4, página 9). Los numeradores de ambas estadísticas son iguales y los denominadores son siempre positivos. Por lo tanto, si r=0 también b=0, no existiendo relación rectilínea entre las variables X e Y. Si r es positivo también b es positivo, y la relación entre las variables es de proporcionalidad directa. Finalmente, si r es negativo, b también lo es, de modo que la relación entre las variables es inversa.

Podemos escribir: $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}} \sqrt{\frac{\sum x^2}{\sum x^2}} = b \cdot \frac{S_x}{S_Y}$

Con los elementos que hemos visto no debe sorprendernos que probar la existencia de una regresión significativa por la prueba t implique probar la existencia de una correlación significativa.

En efecto, si ß=0 $t = \frac{b-\beta}{\hat{\sigma}_b} = \frac{\sum xy / \sum x^2}{\sum y^2} = \frac{r-\rho}{\hat{\sigma}_r}$

si se cumple que $\rho = 0$ y consideramos $\hat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ [2]

Limitantes de la correlación. El coeficiente de correlación es muy importante en Biometría. Cuando Karl Pearson lo propuso, nació la Biometría. No obstante eso, modernamente se tiende a darle más importancia al enfoque de regresión que a la correlación. Una de las razones puede ser vista en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. Los datos que se muestran en la tabla corresponden a dos variables, llamémosle X y Y.

	X	Y	$x=X-\overline{X}$	$y=Y-\overline{Y}$	xy
	0	4	-2	2	-4
	1	1	-1	-1	+1
	2	0	0	-2	0
	3	1	1	-1	-1
	4	4	2	2	+4
TOTALES	10	10	0	0,0	0,0

Las respectivas medias son: $\overline{X} = 2$ y $\overline{Y} = 2$. En la tercer y cuarta columnas se presentan los desvíos con respecto a las medias de los valores de X y de Y, se puede verificar que suman cero.

[2] $\Sigma y^2 (1-r^2+r^2) = \Sigma y^2 (1-r^2) + \Sigma y^2 r^2$ pero como $\Sigma y^2 r^2$ = SCR y SCE = $\Sigma y^2 (1-r^2)$ tenemos Σy^2 = SCR + SCE

Finalmente, en la quinta columna se presentan los productos. La covarianza es el promedio de esos productos de desvíos con respecto a la media: $S_{xy} = \sum xy / n = 0$. El coeficiente de correlación de Pearson es la covarianza dividida por el producto de las desviaciones estándares: r=0 en este ejemplo. Y sin embargo $Y=X^2+4$. Cuando la relación entre las variables es perfecta decimos que tenemos una situación determinística o matemática en oposición a la situación probabilística o estadística. Dos variables tienen correlación cero cuando no hay relación rectilínea entre ellas, pudiendo haber relaciones curvilíneas. Por lo tanto, que dos variables sean incorrelacionadas no quiere decir que sean independientes.

La modelación es muy recomendable. Entonces actualmente se considera que el estudio de la regresión proporciona mejores herramientas que el estudio de la correlación. El estudio de la regresión es el estudio de la forma de la relación entre variables. No obstante, interesa también medir el grado de la relación así determinada y, para ello, contamos con distintos mecanismos. Uno de ellos es el propio estudio de la regresión: si esta es significativa lo que se determina como significativo es, en realidad, el grado de la relación. Otro coeficiente muy relacionado a lo anterior es el error estándar de estimación: $\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{\sum (Y-\hat{Y})^2}{n-2}}$ cuanto mayor sea este, menor es el ajuste de la regresión determinada a los puntos muestrales, por lo que tendremos menor confianza en los valores predichos por la línea y mayor radio para el intervalo de confianza de la predicción.

Un tercer mecanismo para cuantificar la relación entre variables, es el uso de los coeficientes de determinación y de correlación. El coeficiente de determinación (r^2) es la proporción de la variación de la variable de interés, que resulta explicada por la relación con la variable independiente, medidas a través de la suma de cuadrados; es decir, el cociente entre la suma de cuadrados de la regresión y la suma de cuadrados total de la variable de interés: $r^2 = SCR/SC$. Generalmente, el coeficiente de determinación se expresa, indistintamente, en porcentaje o proporción, y puede variar entre 0, si nada de la variación de interés es explicada por la regresión, y 100% si toda la variación está explicada por el modelo.

Como se puede demostrar fácilmente, el coeficiente de correlación es la raíz cuadrada del coeficiente de determinación anterior:

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{SCR}{SC}} = \sqrt{\frac{b\sum xy}{\sum x^2}} = \sqrt{\frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2 \sum y^2}} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

2.3.2. Modelos I y II.

Muchas veces interesa distinguir entre los casos en los que X es una variable fija de los que es una variable aleatoria. El modelo I es cuando la variable X es fijada por el experimentador de tal modo que puede ser manejada. Por el contrario, en el modelo II los valores de X son aleatorios, es decir que no se pueden prever con certeza. Supongamos que queremos estudiar la relación entre el peso de animales y su edad. Si elegimos animales de 1, 2, 3, meses y medimos su peso, estamos en un caso de modelo I. Si elegimos animales al azar y registramos su edad y su peso, estamos en un caso de modelo II. En el primer caso los valores de la edad de los animales son elegidos, en la segunda situación los valores de edad son aleatorios. El uso de los coeficientes de correlación tiene únicamente un sentido pleno en el caso de modelo II. El siguiente es un ejemplo de modelo II.

Ejemplo 2.12. En un estudio se recogieron datos para estudiar la relación entre el contenido en colesterol, la edad y el peso de las personas. Por razones fisiológicas se considera la masa corporal (peso/talla^2). Los datos son:

OBS	COLEST	EDAD	MASA
1	5.94	52	20.7
2	4.71	46	21.3
3	5.86	51	25.4
4	6.52	44	22.7
5	6.80	70	23.9
6	5.23	33	24.3
7	4.97	21	22.2
8	8.78	63	26.2
9	5.13	56	23.3
10	6.74	54	29.2
11	5.95	44	22.7
12	5.83	71	21.9
13	5.74	39	22.4
14	4.92	58	20.2
15	6.69	58	24.4
16	6.48	65	26.3
17	8.83	76	22.7
18	5.10	47	24.5
19	5.81	43	20.7
20	4.65	30	18.9
21	6.82	58	23.9
22	6.28	78	24.3
23	5.15	49	23.8
24	2.92	36	19.6
25	9.27	67	24.3
26	5.57	42	22.0
27	4.92	29	22.5
28	6.72	33	24.1
29	5.57	42	22.7
30	6.25	66	27.3

ANOVA SECUENCIAL EN UN MODELO II. Supongamos que corremos los tres modelos:

$$\text{Colesterol} = \beta_0 + \beta_1 \text{ EDAD} + \beta_2 \text{ MASA}$$

$$\text{Colesterol} = \beta_0 + \beta_1 \text{ EDAD}$$

$$\text{Colesterol} = \beta_0 + \beta_2 \text{ MASA}$$

Un análisis tipo SAS con el resultado de la regresión del ejemplo 2.12 es:

```
                          Analysis of Variance
                            Sum of          Mean
Source            DF       Squares        Square      F Value       Prob>F
Model              2      22.31445      11.15723       10.999       0.0003 ❶
Error             27      27.38830       1.01438
C Total           29      49.70275

Root MSE       1.00716     R-square       0.4490 ❷
Dep Mean       6.00500     Adj R-sq       0.4081
C.V.          16.77211

                          Sum of          Mean
  Source            DF       Squares        Square      F Value       Prob>F
  Model              1      18.06660      18.06660       15.990       0.0004
  Error             28      31.63615       1.12986
  C Total           29      49.70275

  Root MSE       1.06295     R-square       0.3635 ❸
  Dep Mean       6.00500     Adj R-sq       0.3408      C.V.        17.70108

                          Analysis of Variance
                            Sum of          Mean
  Source            DF       Squares        Square      F Value       Prob>F
  Model              1      12.73096      12.73096         9.642       0.0043
  Error             28      36.97179       1.32042
  C Total           29      49.70275

  Root MSE       1.14910     R-square       0.2561 ❹
  Dep Mean       6.00500     Adj R-sq       0.2296      C.V.        19.13565
```

❶ El análisis de varianza muestra un pvalue de 0,0003, es decir que el modelo es significativo al uno por mil.
❷ El R^2 es 0,449 de modo que el 44,9% de la variación en colesterol está asociada con las variaciones de edad y peso corporal.

Modelo: Colesterol = -0,435 + 0,042 EDAD + 0,184 MASA con R^2=0,45

El modelo (2) Colesterol = 3,296 + 0,053 EDAD tiene un R^2= 0,36 ❸

El modelo (3) Colesterol = -0,827 + 0,293 MASA tiene un R^2=0,26 ❹

R(E,M) = 22,31	R^2=0,45
R(E) = 18,07	R^2=0,36
R(M | E) = 4,24	R^2=0,09
R(M) = 12,73	R^2=0,26
R(E | M) = 9,58	R^2=0,19

Notemos, entre otras cosas, que 18,07+12,73 ≠22,31, de modo que el modelo completo explica menos que la suma de los dos modelos simples. Esto se debe a que existe correlación entre las variables edad y masa. Las suma de cuadrados parciales son: R(M | E) = 22,31-18,07 = 4,24 de modo que el modelo completo explica 22,31 la edad explica 18,07 y el aporte adicional del peso en un modelo que ya tenía a la edad es: 4,24. Similarmente podemos calcular la suma de cuadrados adicional (marginal) para la edad, R(E | M) = 22,31-12,73=9,58. La partición de la suma de cuadrados secuencial se llama en SAS tipo I, y depende del orden en que coloquemos a las variables en el modelo. La suma de cuadrados marginal se llama tipo III y no depende del orden, pero tampoco suman el total.

2.3.3. Correlación total y parcial.

Cada variable independiente tiene su correlación individual con la variable de interés, la que se mide por el coeficiente de correlación r: $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\left(\sum x^2\right)\left(\sum y^2\right)}}$

Este coeficiente de correlación se individualiza en estudios de correlación múltiple con el nombre de coeficiente de *correlación total* o *correlación simple*, ya que se desinteresa de los efectos de los otros factores. El problema de la correlación total es que incluye todo. La correlación total determinada entre la variable de interés y cada una de las variables independientes puede ser engañosa, ya que la influencia de otros factores puede distorsionar la relación.

Ejemplo 2.12 (continuación). Los datos de colesterol, edad y masa corporal de personas permiten calcular la siguiente matriz de correlaciones totales.

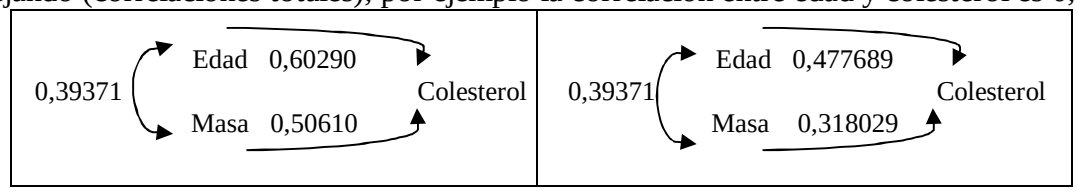
	EDAD	MASA
COLEST	0.60290	0.50610
EDAD		0.39371

La correlación total o simple vale en este caso 0,603 entre colesterol y edad, 0,506 entre colesterol y masa corporal y 0,394 entre edad y masa corporal. Nos podemos preguntar ¿Cuál es la correlación entre el colesterol y la edad descontado el efecto de la masa? Que es como si nos preguntáramos: ¿Qué correlación hay entre colesterol y edad si las personas no engordaran? Este es el concepto de *correlación parcial*. Los coeficientes de correlación parcial se encuentran a partir de los de correlación total del siguiente modo: $r_{YX1.X2} = \frac{r_{YX1} - r_{YX2} * r_{X1X2}}{\sqrt{\left(1 - r_{YX2}^2\right)\left(1 - r_{X1X2}^2\right)}}$

donde $r_{YX1.X2}$ es el coeficiente de correlación parcial entre Y y X_1 descontado el efecto de X_2 y r_{X1X2}, r_{YX1} y r_{YX2} son los coeficientes de correlación total. En el ejemplo 2.12 el cálculo de la correlación parcial, se muestra en el siguiente proceso.

$$r_{CE.P} = \frac{0,6029 - (0,5061)(0,3937)}{\sqrt{\left(1 - 0,5061^2\right)\left(1 - 0,3937^2\right)}} = \frac{0,6029 - 0,19925}{\sqrt{(0,7439)(0,8450)}} = \frac{0,40365}{0,7928} = 0,5091$$

Coeficientes de paso. Notemos la situación de la izquierda: las correlaciones son las que veníamos manejando (correlaciones totales), por ejemplo la correlación entre edad y colesterol es 0,60.



En la situación de la derecha estamos indicando que la correlación entre la edad y el colesterol se puede descomponer en:

Entonces r_{EC}=0,60290=0,477689+0,39371*0,318029

El 0,477 se puede considerar un efecto directo de la edad sobre el colesterol, el restante 0,123 se puede considerar un efecto indirecto de la edad, que se debe a la correlación entre la edad y la

masa corporal (0,39) multiplicado por el efecto de la masa corporal sobre el colesterol (0,32). Esta situación pretende introducir los diagramas y coeficientes de paso de potencial utilidad en fisiología y otras ciencias.

En este caso los coeficientes de paso se encuentran planteando el siguiente sistema de ecuaciones:

$1\ p_1 + 0,39371\ p_2 = 0,5061$

$0,39371\ p_1 + p_2 = 0,39371$

Y resolviendo encontramos p_1 (=0,477689) y p_2 (=0,318029).

En el ejemplo 2.8, la correlación entre rendimiento y nitrógeno descontado el efecto del fósforo es:

Tenemos: $r_{YN.P} = \frac{r_{YN} - r_{YP} * r_{NP}}{\sqrt{(1 - r_{YP}^2)(1 - r_{NP}^2)}} = \frac{0,672 - 0,577 * 0}{\sqrt{(1 - 0,577^2)(1 - 0)}} = 0,672/0,817 = 0,822.$

Mientras que entre rendimiento y fósforo descontado el efecto del nitrógeno es: $r=0,577/\sqrt{(1 - 672^2)(1 - 0)} = 0,577/0,740 = 0,779.$

Tenemos: $r_{YN.P} = \frac{r_{YP} - r_{YN} * r_{NP}}{\sqrt{(1 - r_{YN}^2)(1 - r_{NP}^2)}} = \frac{0,577 - 0,577 * 0}{\sqrt{(1 - 672^2)(1 - 0)}}$

Finalmente se puede destacar que la relación entre el coeficiente de correlación múltiple y los coeficientes de correlación parcial esta dada por la expresión:

$1 - R^2 = (1-r^2YX1)(1-r^2YX2.X1)$

En el ejemplo 2.8: $1 - 0,886 = (1-0,672^2)(1-0,779^2) = (1-0,452)(1-0,607) = 0,548*0,393 = 0,215$

En el ejemplo 2.12 los predictores edad de la persona y masa corporal tienen una correlación de 0,40 entre ellos. En el ejemplo 2.8 los factores son ortogonales, es decir no tienen correlación entre ellos. Esto es así porque al ser un experimento de fertilización el investigador controla los valores de N y P que usa (modelo I), y diseñó el experimento de modo que los factores fueran ortogonales. Mientras que en el ejemplo 2.12 tenemos un modelo II, el investigador no controla los valores de los predoctores y no puede evitar que haya una correlación entre la edad de la persona y su masa.

2.3.4. Correlación múltiple y parciales.

A la proporción, o más comúnmente el porcentaje, de la variación explicada por el modelo de la variación total de los datos se le conoce como **coeficiente de determinación** R^2: $R^2 = \frac{SCR}{SC}$. El **coeficiente de correlación múltiple** es la raíz cuadrada positiva del coeficiente de determinación: $R = \sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{SCR}{SC}}$. cuadrada de esa cantidad, por lo tanto $R=\sqrt{0,4490}=0,67$. La correlación múltiple es siempre positiva, y varía entre 0 y 1. En el ejemplo de Bottaro (1973) tenemos: $R^2= \frac{6:408.584,3}{8:159.630,7} = 0,785$ y $R = 0,886$. El coeficiente de determinación indica que el 78,5% de la variación de la variable de interés esta "explicado" por la regresión múltiple.

Ejemplo 2.13. El siguiente cuadro muestra la relación entre tres variables Y, X_1, y X_2.

Granja	Y	X1	X2
1	1.900	8	5
2	1.500	4	5
3	1.500	3	10
4	1.860	7	8
5	1.900	7	10
6	2.100	8	15
7	1.840	6	12
8	1.400	1	15
9	1.740	4	17
10	1.640	2	22
11	1.800	4	20
12	1.760	5	13

Si ajustamos el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$ tenemos: $Y = 1365+77,14 X_1$ con $R^2=0,780$. El 78% de la variación de Y resulta explicada por su relación con X_1.

Si ajustamos el modelo para la relación con X_2 y realizamos el mismo análisis, tenemos: $Y= 1754-074X_2$ con $R^2=0,00$. No habría relación entre Y y X_2.

Finalmente, si ajustamos el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ tenemos:
$Y = 1000 + 100 X_1 + 20 X_2$ con un $R^2=1,00$!
Por tanto el 100% de la variación de Y resulta ahora explicada por el modelo.
Moraleja: la relación entre Y y X_2 es perfecta si consideramos X_1 mientras que anteriormente habíamos pensado que no había relación entre ellas.

¿Cuanto valdrá el coeficiente de correlación parcial de Y con cada una de las variables independientes? Compare con el coeficiente de correlación total.

En el ejemplo, el porcentaje de la variación de la variable Y asociado con X1 es de 1,65% ($r^2_{YX1} = 0,01652$) y el asociado con X_2 63,53% ($r^2_{YX2} = 0,63534$). Si bien la parte explicada por las

variables independientes no suman 100% el modelo multivariante tiene un R^2=100%. Es decir, que el aporte de X_2 sola es 63,53% pero el aporte de X_2 en adición a lo que aporta X_1 es de 99,98%! A su vez, X1 tomada sola explica el 1,65% de la variación de Y, pero tomada en adición a X_2 explica el 36,466%. La relación entre Y y X_1 está totalmente desfigurada por la presencia de X_2 de modo que, a pesar de que la variable independiente tiene en realidad gran influencia en Y, el coeficiente de correlación total es solo 0,128.

Otro ejemplo, artificial. Con los siguientes datos corremos una correlación y nos da positiva muy alta 0,98

The CORR Procedure - Simple Statistics

Variable	N	Mean	Std Dev	Sum	Minimum	Maximum
X	11	23.90909	15.49487	263.00000	8.00000	42.00000
Y	11	34.81818	29.49515	383.00000	7.00000	73.00000

Pearson Correlation Coefficients, N = 11
Prob > |r| under H0: Rho=0

	X	Y
X	1.00000	0.97781
		<.0001
Y	0.97781	1.00000
	<.0001	

t=a

The CORR Procedure

Simple Statistics

Variable	N	Mean	Std Dev	Sum	Minimum	Maximum
X	6	10.50000	1.87083	63.00000	8.00000	13.00000
Y	6	9.33333	1.36626	56.00000	7.00000	11.00000

Pearson Correlation Coefficients, N = 6
Prob > |r| under H0: Rho=0

	X	Y
X	1.00000	-0.86071
		0.0278
Y	-0.86071	1.00000
	0.0278	

t=b

The CORR Procedure

Simple Statistics

Variable	N	Mean	Std Dev	Sum	Minimum	Maximum
X	5	40.00000	1.58114	200.00000	38.00000	42.00000
Y	5	65.40000	5.41295	327.00000	59.00000	73.00000

Pearson Correlation Coefficients, N = 5
Prob > |r| under H0: Rho=0

	X	Y
X	1.00000	-0.90552
		0.0344
Y	-0.90552	1.00000
	0.0344	

Cuando calculamos la correlación dentro de cada raza nos da negativa (-0,86 para la raza A y -0,90 para la raza B, ambas significativas). Debemos estar muy alerta por si se presenta este tipo de situaciones donde una tercer variable (en este caso la raza) nos distorsiona totalmente la correlación que estamos encontrando.

2.3.5. El anova secuencial y la correlación parcial.

Puede existir interés en probar la significación de los coeficientes de correlación parcial o múltiple, del mismo modo que se prueban los de correlación total. El modo más fácil de hacerlo es a través de un análisis de varianza secuencial que veremos ahora.

Las preguntas son: ¿cuánto aporta el modelo con X_1 y X_2 ? ¿Cuánto aporta X_1 sola? ¿Cuánto agrega X_2 por sobre lo que aporta X1? ¿Vale la pena conservar a X_2 o por el contrario el modelo explica casi lo mismo con o sin ella?. Viceversa, ¿cuánto aporta X_1 por sobre lo que aporta X_2? puede suceder que todo el valor del modelo este dado por X_2 y no haya ventaja en mantener a X_1 en el modelo. Todas estas respuestas están contestadas por SC(X1|X2).

Cuando las X's son variables aleatorias (y no fijas) el modelo se conoce como modelo II por algunos autores (Snedecor y Cochran,1963; Steel y Torrie,1980). Los casos más presentados son cuando las X's y la variable Y tienen conjuntamente una distribución, como la normal multivariante. En estos casos el problema de interés es encontrar funciones de predicción de la esperanza condicional de la variable Y. En realidad ahora todas las variables están en un plano de mayor igualdad y se puede predecir cualquiera de ellas a partir de las otras. El tema se vincula entonces a un enfoque de como encontrar predictores óptimos (BP-best predictors), predictores que sean óptimos dentro de los lineales (BLP-best linear predictors), o predictores que sean óptimos entre los lineares insesgados (BLUP- best linear unbiased predictors). El tema tiene gran aplicación en genética y otros campos y lo trataremos en otra parte de estas notas.

2.3.6. Coeficiente de correlación intraclase

Un coeficiente de correlación definido diferente es el coeficiente de correlación intraclase. Este coeficiente es generalmente usado cuando hay valores agrupados (en grupos de más de dos) donde el concepto de correlación entre dos valores no tiene vigencia. Por detalles del concepto de correlación intraclase puede verse Steel & Torrie (1980), Snedecor & Cochran (1967), o en otras de estas notas.

$$P_I = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \sigma_e^2}$$

UNA SITUACIÓN DIFERENTE.

Ejemplo 2.14. La tabla siguiente muestra la velocidad de crecimiento (aumentos de peso vivo, en kg. por día) en animales vacunos. Para cada animal se muestra el número de caravana que lo identifica y el valor del crecimiento de peso.

Progenie		Padre		Madre		Promedio
No	Aumento	No	Aumento	No	Aumento	Padres
1	0,782	183	0,793	44	0,562	0,678
2	0,817	188	0,884	140	0,610	0,747
3	0,763	189	0,873	86	0,522	0,698
4	0,815	189	0,873	122	0,575	0,724
5	0,775	189	0,873	58	0,628	0,751
6	0,720	191	0,698	65	0,507	0,603
7	0,782	191	0,698	33	0,594	0,646
8	0,759	191	0,698	39	0,564	0,631
9	0,853	192	0,976	114	0,520	0,748
10	0,807	192	0,976	17	0,632	0,804
11	0,800	194	0,964	28	0,615	0,790
12	0,856	194	0,964	9	0,504	0,734

Uno de los análisis que interesan es el cálculo de la regresión de los valores de la progenie sobre el valor de alguno o el promedio de los padres. A esos efectos consideramos Y a la segunda columna y X a la sexta. Tenemos entonces: $\sum Y = 9{,}529$ $\sum X = 8{,}5515$ las sumas de cuadrados y productos sin corregir son:

$\sum Y^2 = 7{,}583631$ $\sum X^2 = 6{,}137417$ $\sum XY = 6{,}808671$

de modo que las medias son: $\overline{Y} = 0{,}794083$ $\overline{X} = 0{,}712625$ y las sumas de cuadrados y productos corregidas son: $\Sigma y^2 = 0{,}016810$ $\sum x^2 = 0{,}043404$ $\sum xy = 0{,}018067$

El coeficiente de regresión es: **b** = 0,018067 / 0,043404 = 0,416255

y el de correlación es: **r** = 0,018067 / 0,027012 = 0,68854

Considerando que **a** = 0,497449, la recta de regresión de los valores fenotípicos de la progenie sobre el promedio de los padres sería: $\hat{Y} = 0{,}497449 + 0{,}416255\ X$. Una de las particularidades es el valor de a ¿qué interés tiene el valor de Y cuando X es cero? Es decir ¿Qué valor tendría un animal cuyos padres tengan 0 de crecimiento? Por esa razón es más interesante una recta de regresión de la forma:

$$\hat{Y} = \mu_Y + b\,(X - \mu_X)$$

que será: $\hat{Y} = 0{,}794083 + 0{,}416255\,(X - 0{,}712625) = 0{,}794083 + 0{,}416255\ x$

Además de eso, tenemos otra particularidad. La teoría genética indica que el coeficiente de regresión debería ser 0,5. Y son los desvíos de los animales con respecto a su media, X son los desvíos de los padres con respecto a su respectiva media. Los valores de ambas variables deberían ser corregidos por diferentes factores que los afectan, esa debe ser la razón por la que el coeficiente de regresión no resultó igual a 0,5.

2.4. COMPUTACIÓN Y REGRESIÓN

2.4.1. Regresión en el SAS

Como decíamos en la sección 1.4 anterior, SAS dispone de diferentes mecanismos para estudiar regresiones y correlaciones. El PROC CORR calcula las correlaciones de "todos contra todos" de una serie de variables. Específicamente para regresión se dispone de: PROC REG, PROC RSQUARE, PROC RSREG, PROC NLIN, PROC STEPWISE, El PROC REG es el sistema básico para regresión y lo veremos con más detalle a continuación. El PROC RSQUARE, el PROC RSREG y el PROC STEPWISE sirven para modelación. El PROC NLIN sirve para el ajuste de regresiones no lineales.

DESCRIPCION DEL PROC REG

```
PROC REG ajusta estimadores por mínimos cuadrados a modelos de regresión
PROC REG DATA= OUTEST= OUTSSCP= NOPRINT SIMPLE USSCP ALL COVOUT CORR
SINGULAR=n;
   MODEL variable dependiente=regresores /
METHOD=NONE|FORDWARD|BACKWARD|STEPWISE|MAXR|MINR|RSQUARE
        SLENTRY= SLSTAY= SELECT= INCLUDE= START= STOP=
        NOPRINT NOINT ALL XPX I SS1 SS2 STB P R
        CLM VIF COVB CORRB COLLIN COLLINOUT TOL
        CLI DW INFLUENCE PARTIAL DETAILS SIGMA= ADJRSQ
        AIC BIC CP GMSEP JP MSE PC RMSE SBC SP SSE B;
        VAR variables;
        ID variables;
        FREQ variables;
        WEIGHT variables;
        ADD variables;
        DELETE variables;
        DELOBS n;
PRINT ALL XPX I SS1 SS2 STB TOL VIF COVB CORRB COLLIN COLLINT
    P R CLM CLI DW INFLUENCE PARTIAL ANOVA;
OUTPUT OUT=SASdataset PREDICTED= RESIDUAL= L95M= U95M=
    L95= U95 STDP= STDR= STDI= STUDENT= COOKD= H= PRESS=
    RSTUDENT= DFFITS= COVRATIO= ;
TEST ecuación1,...,ecuaciónk / PRINT;
MTEST ecuación1,...,ecuaciónk / PRINT CANPRINT DETAILS ;
BY variables;
```

El PROC REG se acompaña siempre de una o más sentencias MODEL para especificar modelos de regresión. Una sentencia OUTPUT debe seguir a cada sentencia MODEL. Varias sentencias TEST y MTEST pueden seguir a cada MODEL. Las sentencias WEIGHT, FREQ, y ID se especifican opcionalmente, una para el PROC en su totalidad.

2.4.2. Ejemplos.

Veremos la aplicación del PROC REG a través de los siguientes ejemplos. El ejemplo 2.4 corrido en el SAS es:

```
data uno; input edad peso; cards;
1 4.0
2 5.9
3 4.7
4 7.1
6 7.7
8 9.2
proc reg; model peso=edad; run;
proc glm; model peso=edad/xpx i; run;
```

y la salida es:

Model: MODEL1
Dependent Variable: PESO

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	16.52029	16.52029	27.614	0.0063
Error	4	2.39304	0.59826		
C Total	5	18.91333			

Root MSE	0.77347	R-square	0.8735
Dep Mean	6.43333	Adj R-sq	0.8418
C.V.	12.02289		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	3.645098	0.61744959	5.903	0.0041
EDAD	1	0.697059	0.13264945	5.255	0.0063

General Linear Models Procedure
Number of observations in data set = 6

The X'X Matrix

	INTERCEPT	EDAD	PESO
INTERCEPT	6	24	38.6
EDAD	24	130	178.1
PESO	38.6	178.1	267.24

X'X Inverse Matrix

	INTERCEPT	EDAD	PESO
INTERCEPT	0.637254902	-0.117647059	3.6450980392
EDAD	-0.117647059	0.0294117647	0.6970588235
PESO	3.6450980392	0.6970588235	2.3930392157

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	16.52029412	16.52029412	27.61	0.0063
Error	4	2.39303922	0.59825980		
Corrected Total	5	18.91333333			

R-Square	C.V.	Root MSE	PESO Mean
0.873473	12.02289	0.77347256	6.43333333

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	3.645098039	5.90	0.0041	0.61744959
EDAD	0.697058824	5.25	0.0063	0.13264945

❶ Los coeficientes coinciden con lo calculado en la página 57.
❷Los errores estándar se comparan con lo obtenido en la página 58.
❸El valor de t para probar la hipótesis de que el parámetro respectivo es cero, como se mostró en la página 60.
❹ SAS reporta el p-value permitiendo que hagamos la inferencia al nivel de significación deseado.

El PROC GLM de SAS es también muy eficiente en el análisis de regresión aunque tiene algunas diferencias con el PROC REG. Analizaremos el ejemplo 2.8 con el PROC GLM. El programa sería:

```
DATA DOS8;
INPUT N P Y;
N2=N*N; P2=P*P; NP=N*P;
CARDS;
 80   80   1125
 80  240   1135
240   80   1345
240  240   2185
160  160   1435
  0  160    480
320  160   1895
160    0    850
160  320   2250
  0    0    505
  0  320    615
320    0    860
320  320   3290
PROC GLM;  MODEL Y=n p;  RUN;
PROC GLM;  MODEL Y=n  p n2 p2 np;  RUN;
```

y la salida es:

```
The GLM Procedure
Number of Observations Used         13

                        The X'X Matrix
              Intercept             n             p             y
Intercept            13          2080          2080         17970
n                  2080        512000        332800       3688000
p                  2080        332800        512000       3573600
y                 17970       3688000       3573600      32999700

                        X'X Inverse Matrix
              Intercept             n             p             y
Intercept    0.3626373626  -0.000892857  -0.000892857  33.021978022
n           -0.000892857  5.5803571E-6             0  4.5357142857
p           -0.000892857             0  5.5803571E-6  3.8973214286
y           33.021978022  4.5357142857  3.8973214286  1751112.9121

Dependent Variable: y
                                 Sum of
Source                DF       Squares    Mean Square   F Value   Pr > F
Model                  2    6408517.857    3204258.929     18.30   0.0005
Error                 10    1751112.912     175111.291
Corrected Total       12    8159630.769

R-Square     Coeff Var      Root MSE       y Mean
0.785393      30.27278      418.4630      1382.308

Source                DF      Type I SS    Mean Square   F Value   Pr > F
n                      1    3686628.571    3686628.571     21.05   0.0010
p                      1    2721889.286    2721889.286     15.54   0.0028

Source                DF     Type III SS    Mean Square   F Value   Pr > F
n                      1    3686628.571    3686628.571     21.05   0.0010
p                      1    2721889.286    2721889.286     15.54   0.0028


                          Standard
```

Parameter	Estimate	Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	33.02197802	251.9958270	0.13	0.8983
n	4.53571429	0.9885259	4.59	0.0010
p	3.89732143	0.9885259	3.94	0.0028

The GLM Procedure
Number of Observations Used 13

The X'X Matrix

	Intercept	n	p	n*n	p*p	n*p	Y
Intercept	13	2080	2080	512000	512000	332800	17970
n	2080	512000	332800	139264000	81920000	81920000	3688000
p	2080	332800	512000	81920000	139264000	81920000	3573600
n*n	512000	139264000	81920000	40140800000	20480000000	22282240000	952896000
p*p	512000	81920000	139264000	20480000000	40140800000	22282240000	934848000
n*p	332800	81920000	81920000	22282240000	22282240000	20480000000	766528000
y	17970	3688000	3573600	952896000	934848000	766528000	32999700

Dependent Variable: y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	8076072.695	1615214.539	135.31	<.0001
Error	7	83558.074	11936.868		
Corrected Total	12	8159630.769			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	y Mean
0.989760	7.903882	109.2560	1382.308

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
n	1	3686628.571	3686628.571	308.84	<.0001
p	1	2721889.286	2721889.286	228.02	<.0001
n*n	1	137317.010	137317.010	11.50	0.0116
p*p	1	27118.711	27118.711	2.27	0.1755
n*p	1	1503119.118	1503119.118	125.92	<.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
n	1	201252.790	201252.790	16.86	0.0045
p	1	16538.066	16538.066	1.39	0.2776
n*n	1	156382.277	156382.277	13.10	0.0085
p*p	1	27118.711	27118.711	2.27	0.1755
n*p	1	1503119.118	1503119.118	125.92	<.0001

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	558.7967914	94.09899432	5.94	0.0006
n	4.0178691	0.97852070	4.11	0.0045
p	-1.1517738	0.97852070	-1.18	0.2776
n*n	-0.0099971	0.00276201	-3.62	0.0085
p*p	0.0041631	0.00276201	1.51	0.1755
n*p	0.0232307	0.00207019	11.22	<.0001

La matriz X'X y su inversa se proporcionan por haber incluido la opción /XPX I; luego del modelo. Compárense los resultados de esta salida con lo visto en la sección 2.2.6 y 2.3.6, donde se proporciona el coeficiente de determinación. Vemos que, básicamente, el PROC GLM proporciona la misma información que el PROC REG en los casos sencillos de regresión que venimos estudiando.

Model: MODEL1 Dependent Variable: COLEST

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	2	22.31445	11.15723	10.999	0.0003
Error	27	27.38830	1.01438		
C Total	29	49.70275			

Root MSE	1.00716	R-square	0.4490
Dep Mean	6.00500	Adj R-sq	0.4081
C.V.	16.77211		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	-0.435015	1.94151154	-0.224	0.8244
EDAD	1	0.042341	0.01377528	3.074	0.0048
MASA	1	0.184421	0.09012105	2.046	0.0506

Model: MODEL2 Dependent Variable: COLEST

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	18.06660	18.06660	15.990	0.0004
Error	28	31.63615	1.12986		
C Total	29	49.70275			

Root MSE	1.06295	R-square	0.3635
Dep Mean	6.00500	Adj R-sq	0.3408
C.V.	17.70108		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	3.295612	0.70480188	4.676	0.0001
EDAD	1	0.053440	0.01336405	3.999	0.0004

Model: MODEL3 Dependent Variable: COLEST

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	12.73096	12.73096	9.642	0.0043
Error	28	36.97179	1.32042		
C Total	29	49.70275			

Root MSE	1.14910	R-square	0.2561
Dep Mean	6.00500	Adj R-sq	0.2296
C.V.	19.13565		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	-0.827263	2.21032123	-0.374	0.7110
MASA	1	0.293482	0.09451642	3.105	0.0043

CORRELATION ANALYSIS

3 'VAR' Variables: COLEST EDAD MASA

Simple Statistics

Variable	N	Mean	Std Dev	Sum	Minimum	Maximum
COLEST	30	6.0050	1.3092	180.1500	2.9200	9.2700
EDAD	30	50.7000	14.7698	1521	21.0000	78.0000
MASA	30	23.2800	2.2576	698.4000	18.9000	29.2000

Pearson Correlation Coefficients / Prob > |R| under Ho: Rho=0 / N = 30

	COLEST	EDAD	MASA
COLEST	1.00000	0.60290	0.50610
	0.0	0.0004	0.0043
EDAD	0.60290	1.00000	0.39371
	0.0004	0.0	0.0313
MASA	0.50610	0.39371	1.00000
	0.0043	0.0313	0.0

1 'PARTIAL' Variables: MASA 2 'VAR' Variables: COLEST EDAD

Simple Statistics

Variable	N	Mean	Std Dev	Sum
MASA	30	23.280000	2.257615	698.400000
COLEST	30	6.005000	1.309155	180.150000
EDAD	30	50.700000	14.769843	1521.000000

Simple Statistics

Variable	Minimum	Maximum	Partial Variance	Partial Std Dev
MASA	18.900000	29.200000	.	.
COLEST	2.920000	9.270000	1.320421	1.149096
EDAD	21.000000	78.000000	190.916119	13.817240

Pearson Partial Correlation Coefficients/Prob>|R|under Ho:PartialRho=0/N=30

	COLEST	EDAD
COLEST	1.00000	0.50913
	0.0	0.0048
EDAD	0.50913	1.00000
	0.0048	0.0

1 'PARTIAL' Variables: EDAD

2 'VAR' Variables: COLEST MASA

Simple Statistics

Variable	N	Mean	Std Dev	Sum
EDAD	30	50.700000	14.769843	1521.000000
COLEST	30	6.005000	1.309155	180.150000
MASA	30	23.280000	2.257615	698.400000

Simple Statistics

Variable	Minimum	Maximum	Partial Variance	Partial Std Dev
EDAD	21.000000	78.000000	.	.
COLEST	2.920000	9.270000	1.129863	1.062950
MASA	18.900000	29.200000	4.460574	2.112007

Pearson Partial Correlation Coefficients/Prob>|R|under Ho:PartialRho=0/N=30

	COLEST	MASA
COLEST	1.00000	0.36643
	0.0	0.0506
MASA	0.36643	1.00000
	0.0506	0.0

El ejemplo 2.11. corrido en el SAS. Comencemos por la parte de regresión simple:

```
DATA DOS11;   INPUT NO AP NP APA NM AM AMP;  CARDS;
1   0.782    183  0.793    44   0.562    0.678
2   0.817    188  0.884    140  0.610    0.747
3   0.763    189  0.873    86   0.522    0.698
4   0.815    189  0.873    122  0.575    0.724
5   0.775    189  0.873    58   0.628    0.751
6   0.720    191  0.698    65   0.507    0.603
7   0.782    191  0.698    33   0.594    0.646
8   0.759    191  0.698    39   0.564    0.631
9   0.853    192  0.976    114  0.520    0.748
10  0.807    192  0.976    17   0.632    0.804
11  0.800    194  0.964    28   0.615    0.790
12  0.856    194  0.964    9    0.504    0.734
PROC REG;   MODEL AP=APA;   RUN;
PROC REG;   MODEL AP=AM;   RUN;
PROC REG;   MODEL AP=AMP; RUN;
```

y las salidas serían:

```
Model: MODEL1
Dep Variable: AP
                          Analysis of Variance
                        Sum of          Mean
      Source     DF      Squares       Square      F Value       Prob>F
      Model       1      0.00978      0.00978       13.896       0.0039
      Error      10      0.00704      0.00070
      C Total    11      0.01681

          Root MSE       0.02652     R-Square       0.5815
          Dep Mean       0.79408     Adj R-Sq       0.5397
          C.V.           3.34018

                          Parameter Estimates
                       Parameter        Standard      T for H0:
Variable       DF       Estimate           Error     Parameter=0      Prob > |T|
INTERCEP       1        0.561741      0.06279720           8.945          0.0001
APA            1        0.271481      0.07282805           3.728          0.0039
```

```
               Model: MODEL1
Dep Variable: AP
           Analysis of Variance
                                  Sum of          Mean
      Source     DF      Squares       Square      F Value       Prob>F
      Model       1      0.00000      0.00000        0.000       0.9848
      Error      10      0.01681      0.00168
      C Total    11      0.01681

          Root MSE       0.04100     R-Square       0.0000
          Dep Mean       0.79408     Adj R-Sq      -0.1000
          C.V.           5.16323

                          Parameter Estimates
                       Parameter        Standard      T for H0:
Variable    DF         Estimate           Error     Parameter=0      Prob > |T|
INTERCEP     1         0.000549      0.00115202           0.477          0.6450
APA          1         0.499716      0.00078298         638.224          0.0001
AM           1         0.499829      0.00181593         275.246          0.0001

                          Parameter Estimates
                                Parameter        Standard      T for H0:
Variable    DF         Estimate           Error     Parameter=0      Prob > |T|
INTERCEP     1         0.791183      0.14914287           5.305          0.0003
AM           1         0.005093      0.26109613           0.020          0.9848
```

Model: MODEL1
Dep Variable: AP

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	0.00747	0.00747	8.005	0.0179
Error	10	0.00934	0.00093		
C Total	11	0.01681			

Root MSE	0.03056	R-Square	0.4446
Dep Mean	0.79408	Adj R-Sq	0.3891
C.V.	3.84797		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	0.498128	0.10497387	4.745	0.0008
AMP	1	0.415182	0.14674204	2.829	0.0179

Comparese con lo visto en la seccion 2.3.3, la raiz cuadrada de 0,4446 es r=0,6668.

Ahora, con los mismo datos, consideramos la regresión multiple. Para ello utilizamos el siguiente programa:

PROC REG DATA=DOS11; MODEL AMP= APA AM/XPX I; QUIT;

y obtenemos la siguiente salida:

Model Crossproducts X'X X'Y Y'Y

X'X	INTERCEP	APA	AM	AMP
INTERCEP	12	10.27	6.833	8.554
APA	10.27	8.922048	5.856069	7.391159
AM	6.833	5.856069	3.915483	4.887193
AMP	8.554	7.391159	4.887193	6.140936

INVERSE	INTERCEP	APA	AM	AMP
INTERCEP	16.660154706	-5.136303642	-21.39207055	0.000549017
APA	-5.136303642	7.6958885087	-2.546631242	.49971587824
AM	-21.39207055	-2.546631242	41.39598265	.49982873212
AMP	0.000549017	.49971587824	.49982873212	7.1694186E-7

Dep Variable: AMP Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	2	0.04336	0.02168	272149.366	0.0001
Error	9	0.00000	0.00000		
C Total	11	0.04336			

Root MSE	0.00028	R-Square	1.0000
Dep Mean	0.71283	Adj R-Sq	1.0000
C.V.	0.03959		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	0.000549	0.00115202	0.477	0.6450
APA	1	0.499716	0.00078298	638.224	0.0001
AM	1	0.499829	0.00181593	275.246	0.0001

Entre los comentarios está el hecho obvio de que a efectos del SAS la distinción entre modelos de regresión simple o múltiple no tiene ninguna importancia, usándose la misma metodología en ambos casos.

2.4.5. Funciones linearizables y no lineales.

Dentro de las relaciones curvilíneas existe un conjunto que son susceptibles de ser estudiadas por los métodos descriptos para relaciones rectilíneas, mediante transformaciones de variables. Este tipo de fenómeno se denomina linealidad por anamorfosis por algunos autores (Pimentel Gomes, 1975).

Por ejemplo, en estudios de nutrición animal se considera que el consumo de energía es proporcional a una potencia del peso del animal: $C=A.W^k$. Si aplicamos logaritmos a esa relación: log C = log A + k*log W y tomando log C = Y; log A = a; y log W = X; tenemos: Y = a + k X

Otro ejemplo está dado por las relaciones similares a la de Mitscherlich: $Y = A.B^X$. Tomando logaritmos: log Y = log A + (log B) X y se expresa linealmente como Y'= a + bX. Las transformaciones de éste tipo se conocen como semilogarítmicas, al tomarse el logaritmo de solamente una de las variables; por oposición, las del ejemplo anterior se conocen como logarítmicas al ser lineal cuando ambas variables son transformadas.

Figura 2.10. Diferentes tipos de curvas y transformaciones sugeridas para linealizarlas.