PROBABILIDAD

Concepto

La probabilidad es una medida de la incertidumbre.

Definiciones

Clásica

Frecuentista

Bayesiana

Definición Clásica

Es el cociente entre el número de resultados *favorables* y los resultados *posibles*.

Ejemplos:

- La probabilidad de que un animal elegido al azar sea macho es de 1/2
- La probabilidad de sacar 4 en un dado es 1/6

La probabilidad está comprendida entre 0 y 1

Definición Frecuentista

Es el cociente entre *la frecuencia observada del proceso* y *el total de observaciones, cuando el experimento se realiza en un número grande de veces.*

Este enfoque EXCLUYE sucesos que no se pueden repetir

Ejemplo: Es baja la probabilidad de que una botella de leche fresca dure más de cuatro meses en buenas condiciones.

Definición Bayesiana (o subjetiva)

Es el grado de creencia o juicio personal

Se necesita coherencia, y es difícil de medir.

Ejemplo: Es poco probable que mi amigo Juan me haga trampas jugando a las cartas.

Espacio Muestral (E)

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.

Ejemplos:

Al lanzar una moneda el espacio muestral es:

E={sale cara , sale número}

Al lanzar un dado el espacio muestral es:

E={1,2,3,4,5,6}

Al elegir un animal al azar y chequear su sexo, el espacio muestral es:

E={macho,hembra} E={m,h}

Al elegir tres animales al azar y chequear su sexo, el espacio muestral es:

E={(m,m,m),(m,m,h),(m,h,m),(m,h,h),(h,m,m),(h,m,h),(h,h,m),(h,h,h)}

Evento o Suceso

Es todo subconjunto de un Espacio Muestral.

Ejemplo:

En el lanzamiento de un dado E={1,2,3,4,5,6} los siguientes son eventos:

1) Obtener un número primo A={2,3,5}
2) Obtener un número primo y par B={2}
3) Obtener un número mayor o igual a 5 C={5,6}

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir en forma simultánea, es decir si y solo si su intersección es un conjunto vacío.

Ejemplo:

Al elegir un animal, los eventos “macho” y “preñado” son mutuamente excluyentes.

$$B \cap C = \emptyset$$

Eventos Complementarios

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B = E$

Se dice que A y B son complementarios

A

Eventos Complementarios

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B = E$

Se dice que A y B son complementarios

$A^c = B$ $B^c = A$

Medición Clásica de Probabilidad

Si en un experimento aleatorio todos los resultados son equiprobables, la probabilidad de que suceda un evento es

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables de A}}{\text{número total de casos posibles}}$$

Las probabilidades de los posibles resultados se pueden determinar a priori, sin realizar el experimento.

Medición Experimental o Estadística

La frecuencia relativa del resultado A de un experimento es

$$FR = \frac{\text{número de veces que ocurre A}}{\text{Nº de veces que se realiza el experimento}}$$

Si el experimento se repite un número grande de veces, el valor de la FR se aproximará a P

Probabilidad como conjuntos

E : espacio muestral o conjunto de todos los resultados posibles

A U B : al menos uno de los eventos A ó B ocurre

A ∩ B : ambos eventos ocurren

A^c : el evento A no ocurre

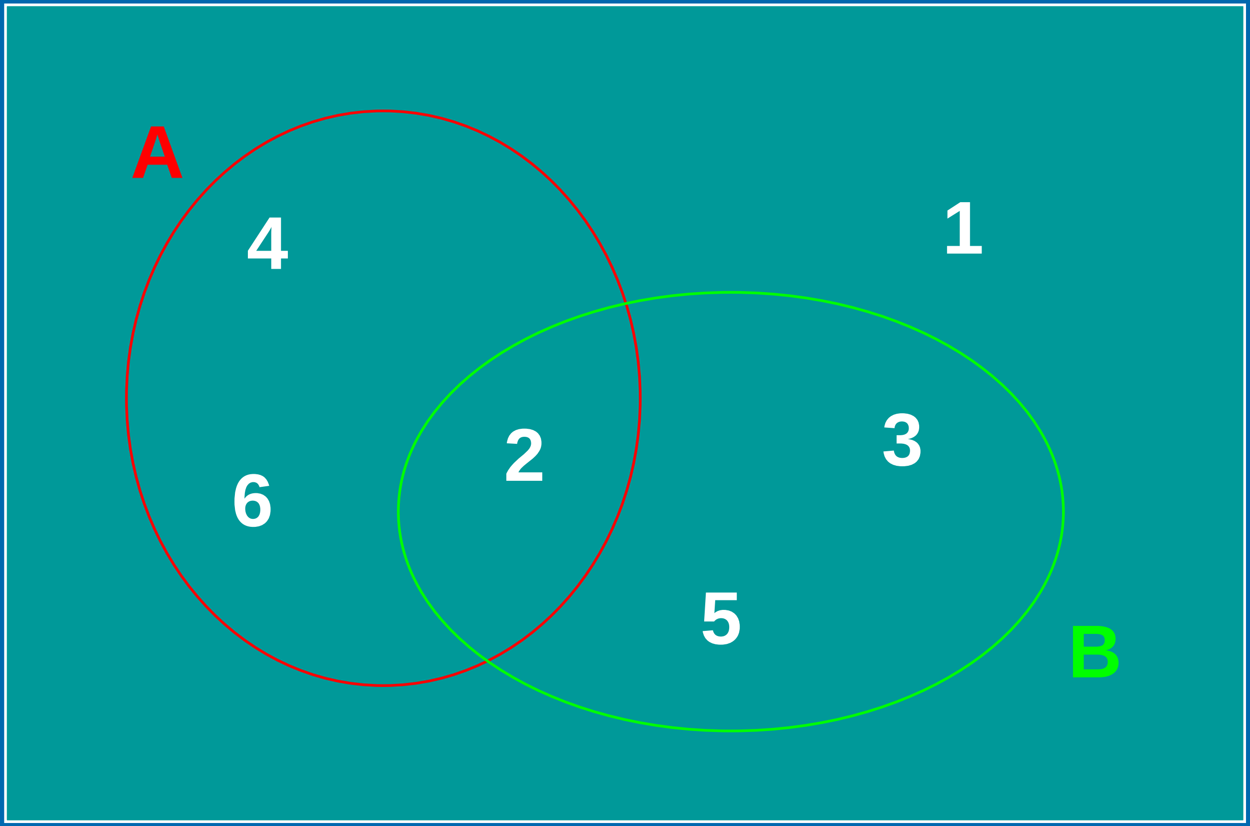
Ejemplo

En el experimento “lanzar un dado de seis caras” se definen los eventos:

A = sale par B = sale primo

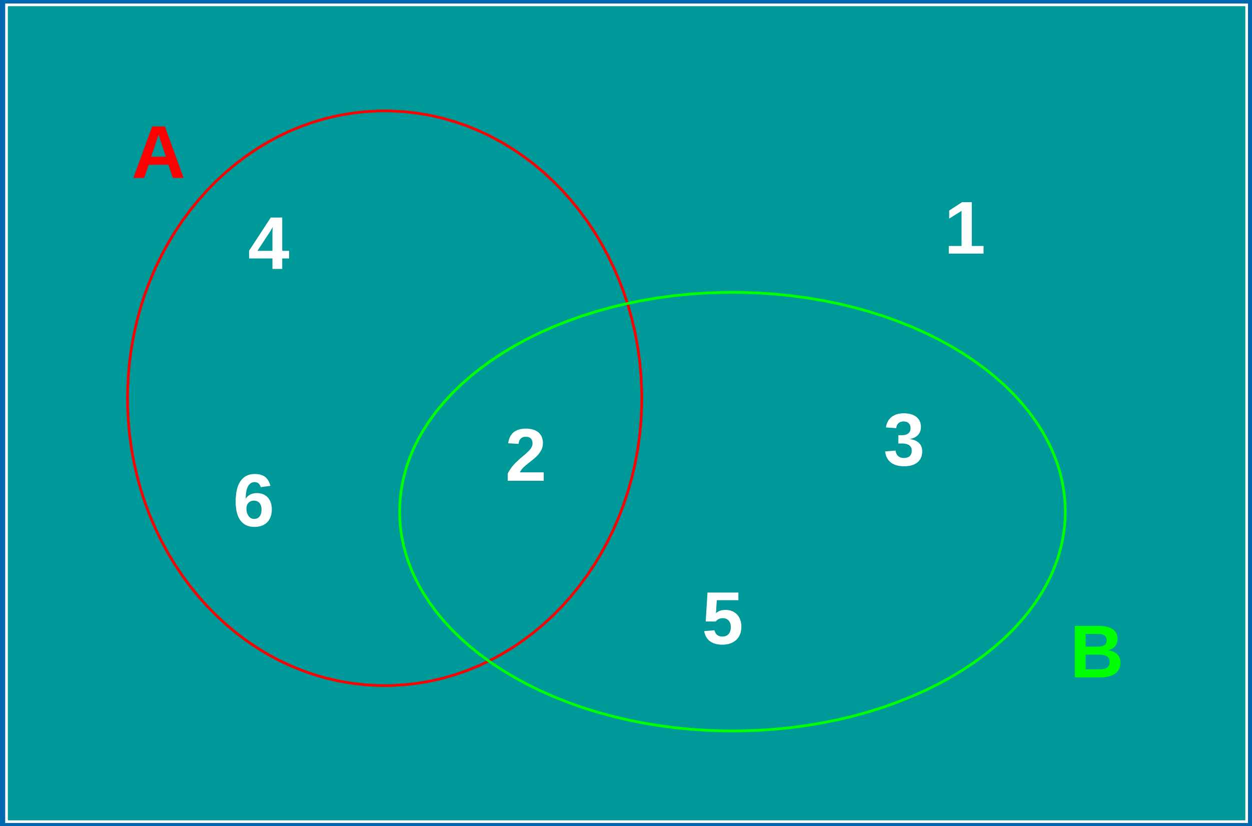
Pares = 2,4,6

Primos = 2,3,5



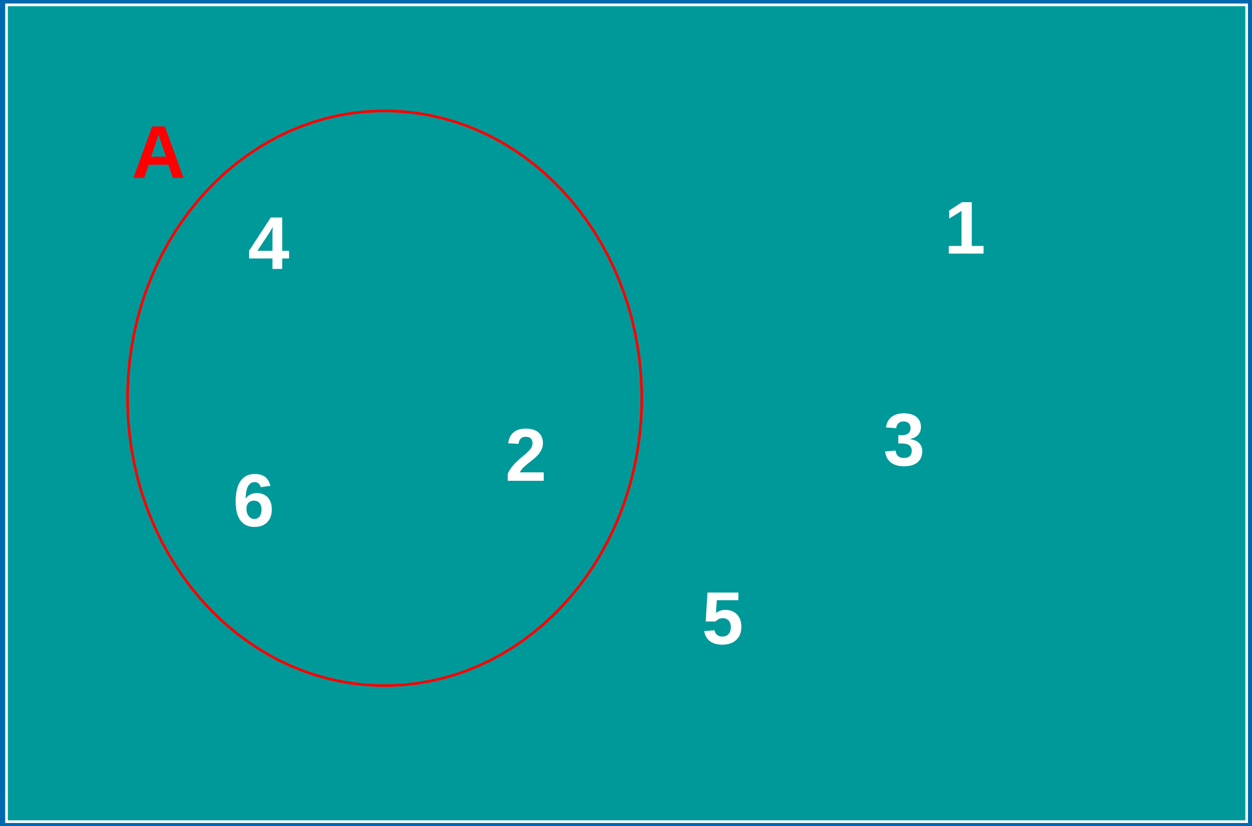
El evento A ó B “sale par o primo” se describe como

A U B = {2,3,4,5,6}



El evento A y B "sale par y primo" se describe como

$$A \cap B = \{2\}$$



El evento “no ocurre A” = “no sale par” = A^c

$A^c = \{1,3,5\}$

Propiedades de la Probabilidad

1) Si $A \cap B = \emptyset$

   (A y B son mutuamente excluyentes) entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

   La probabilidad de que suceda uno u otro evento excluyente es igual a la suma de las probabilidades de cada evento.

Propiedades de la Probabilidad

2) $P(A) + P(A^c) = 1$

La probabilidad de que suceda un evento más la probabilidad de que no suceda el mismo es 1 (ó 100%)

Propiedades de la Probabilidad

3) Si $A \cap B \neq \varnothing$ entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(para no duplicar la probabilidad de los elementos en común)

Propiedades de la Probabilidad

4) Si A y B son eventos independientes (la ocurrencia de A no influye en la ocurrencia de B) entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

Propiedades de la Probabilidad

5) Si A y B son eventos dependientes (la ocurrencia de A influye en la ocurrencia de B) entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

P(B/A) es la probabilidad del evento B sabiendo que ha ocurrido el evento A

Ejemplo propiedad 1

Se extrae una carta al azar de un mazo inglés de 52 cartas. A = “sale 3” y B=“sale una figura”. Que probabilidad existe de que salga A ó B. (son excluyentes)

$A \cap B = \varnothing$

P(AóB) = P(AUB) = P(A) + P(B)

P(AUB) = 4/52 + 12/52 = 4/13

Ejemplo propiedad 2

Igual que el experimento anterior, se saca una carta, A= “no sale rey” por lo tanto A^c=“sale rey”

Es más fácil calcular la probabilidad de A como 1- $P(A^c)$

$$P(A) = 1 – 4/52 = 12/13$$

Ejemplo propiedad 3

En el lanzamiento de un dado de 6 caras, los eventos A="sale par" y B="sale primo" tienen intersección no vacía.

La probabilidad de "sale par o primo" es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$3/6 + 3/6 - 1/6 = 5/6$$

Ejemplo propiedad 4

Lanzamos un dado de 6 caras 2 veces.

A= “sale par el primer lanzamiento”

B= “sale un 3 en el segundo lanzamiento”

Son eventos independientes

La probabilidad de que salga par en el primer lanzamiento y un 3 en el segundo

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$(3/6).(1/6) = 1/12$$

Ejemplo propiedad 5

Al extraer una carta de un mazo inglés normal ¿cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea el as de corazones, sabiendo que la carta extraída es de corazones?

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$$

$$(1/52) / (13/52) = 1/13$$